



نمونه سوالات فصل

حد و پیوستگی

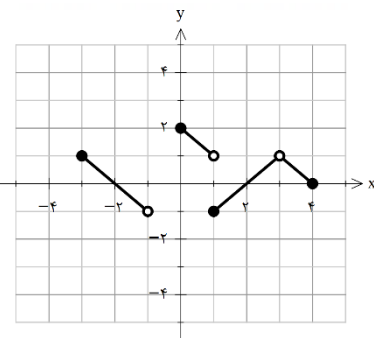
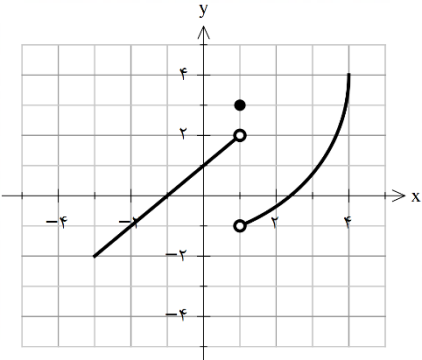
کتاب ریاضی ۲ و حسابان ۱

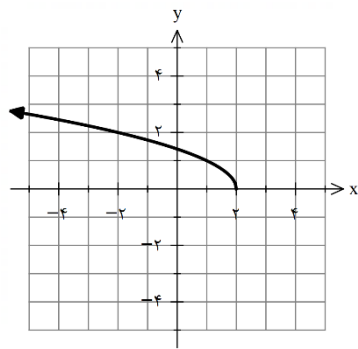
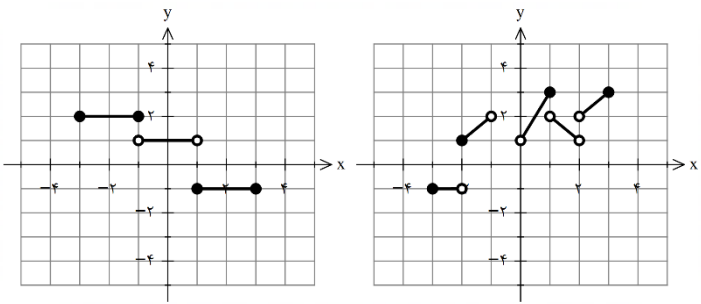
به کوشش: مرتضی معینی

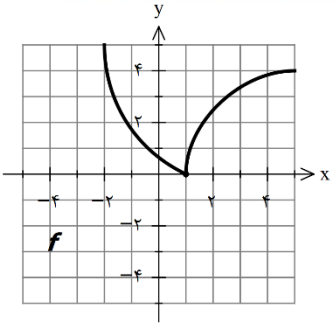
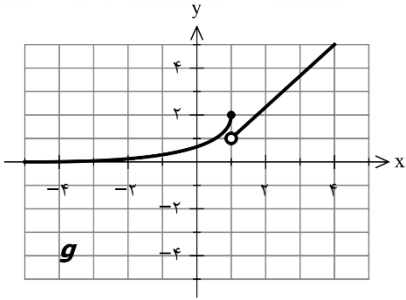
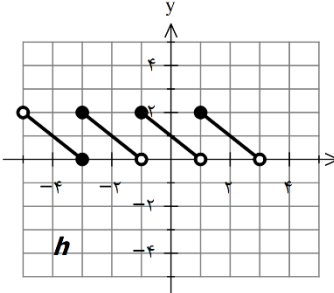
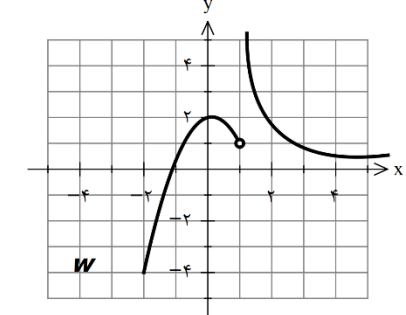
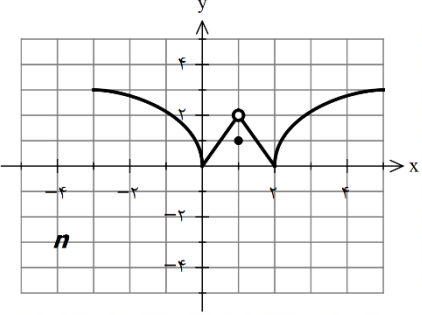


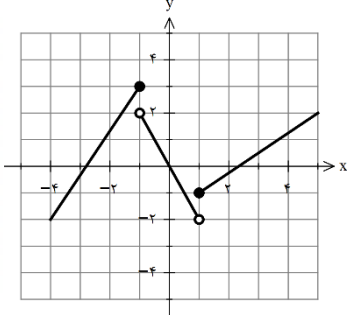
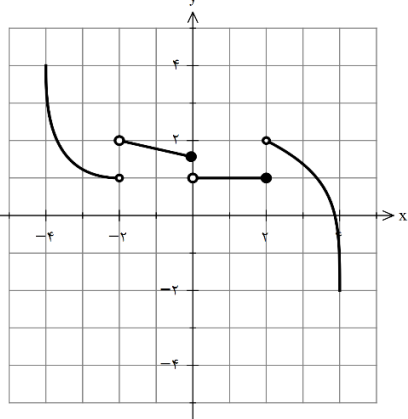
بهار ۹۹

گروه ریاضی آموزش و پرورش ناحیه دو کرج

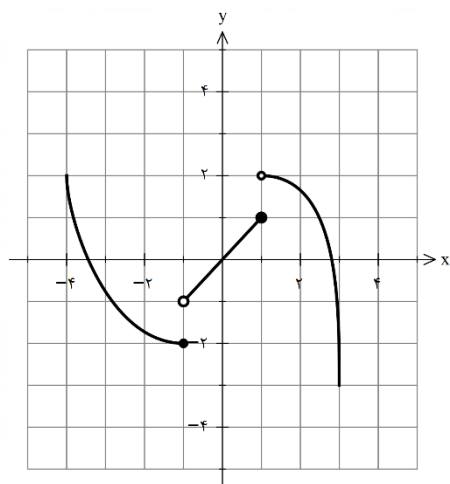
ردیف	
۱	نمودار تابع f رسم شده است، حاصل هر یک از موارد زیر را پیدا کنید.  ۱) $f(-3) =$ ۲) $f(-1) =$ ۳) $f(1) =$ ۴) $f(4) =$ ۵) $f(3) =$ $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) =$
۲	نمودار تابع f رسم شده است، حاصل $f(1) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ پیدا کنید. 
۳	نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -1 \\ x+1 & x > -1 \end{cases}$ را رسم کرده و سپس موارد زیر را پیدا کنید. $f(-1) =$ $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$
۴	نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -1 \\ 2x-1 & x > -1 \end{cases}$ را رسم کرده و سپس موارد زیر را پیدا کنید. $f(-1) =$ $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$
۵	نمودار تابع $f(x) = \frac{ x }{x}$ را رسم کرده و سپس مقدار حد تابع را در $x = a$ که در آن a یک عدد حقیقی است را بررسی کنید.
	نمودار تابع $f(x) = \frac{ x+1 }{x+1}$ را رسم کرده و سپس نقاطی که این تابع حد ندارد را مشخص کنید.
۶	نمودار تابع $f(x) = [x]$ را در بازه $[0, 3]$ رسم کرده و سپس موارد زیر را پیدا کنید. ۱) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ ۲) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) =$
۷	نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & x < 0 \\ -x + 4 & 0 < x < 2 \\ x - 1 & x \geq 2 \end{cases}$ را رسم کرده و سپس تعیین کنید در کدام نقاط حد ندارد.
۸	نمودار تابعی را رسم کنید که در -1 حدش برابر ۱ شود.
۹	نمودار تابعی را رسم کنید در $x = 2$ حد داشته باشد ولی مقدار آن با مقدار تابع در $x = 2$ یکی نباشد.

۱۰	نمودار تابعی را رسم کنید که شرایط $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2, f(2) = 1$ داشته باشد.
۱۱	نمودار تابع $f(x) = \sqrt{2-x}$ رسم کرده حدود زیر را بدست آورید. ۱) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ ۲) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ 
۱۲	با توجه به نمودار f, g حاصل حدهای خواسته شده بدست آورید.  ۱) $\lim_{x \rightarrow -2} (f(x) + 2g(x))$ ۲) $\lim_{x \rightarrow 2} (f^2(x) + g(x))$ ۳) $\lim_{x \rightarrow -1} (2f(x) - g(x))$ ۴) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)g(x)}{f(x) + g(x)}$
۱۳	در هر یک از حالت های زیر درباره حد تابع $f + g$ چه می توان گفت؟ الف) اگر توابع f, g هیچکدام در نقطه ای مانند a حد نداشته باشند. ب) اگر تابع f در a حد داشته باشد ولی تابع g در a حد نداشته باشد.
۱۴	اگر $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 0$ باشد آنگاه حاصل حدهای زیر را بیابید. ۱) $\lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) - 3g(x))$ ۲) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2f(x) + g(x))}{f(x) - 3g(x)}$ ۳) $\lim_{x \rightarrow 2} (2f(x))^2$ ۴) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{h(x) + 4}$ ۵) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2f(x))}{h(x)}$
۱۵	حدهای زیر را به دست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 + x + 4}$ ب) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \sqrt{2x} - 1$ پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} x^2 + 2x$ ت) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - x}{\sqrt{x-3} + x}$ ث) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x + 3}{x + 1}$ ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x^2 - x}$
۱۶	حد توابع زیر را در نقاط داده شده بدست آورید. ۱) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ ۲) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x - 20}{x - 4}$ ۳) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8}{x - 2}$ ۴) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + 2}{x + 1}$

$۵) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{x}{x+6}}{x^2 - 9}$ $۷) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{(x^2 + x)(x^2 - x - 2)}$	$۶) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 12}{2x - 6}$ $۸) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$	
$۱) \lim_{x \rightarrow 2^-} 2[x] - 1$ $۳) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[x] + 2}{x - 1}$ $۵) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - [x]}{x - [x]}$	حاصل حدهای زیر را بدست آورید. $۲) \lim_{x \rightarrow 2^+} x[x] - 2[x]$ $۴) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x[x] - 1}{x^2 - 1}$ $۶) \lim_{x \rightarrow 2^+} [2x] - [x]$	۱۷
$۱) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (\sin x + \cos 2x)$ $۳) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$ $۵) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^2 x}$	حاصل حدهای زیر را بدست آورید. $۲) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (\cos x \cos 2x)$ $۴) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x}$ $۶) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin x \cos x}{\sin x - \cos x}$	۱۸
    	در هر کدام از نمودارهای زیر به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) آیا تابع در $x = 1$ تعریف شده است؟ ب) تابع در $x = 1$ پیوسته راست یا پیوسته چپ پ) تابع در $x = 1$ پیوسته است؟	۱۹
مقدار a, b را طوری تعیین کنید که تابع های زیر در $\square$ پیوسته باشد. الف) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & x < -1 \\ x + b & -1 \leq x \leq 0 \\ ax^2 - x + 3 & x > 0 \end{cases}$	ب) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < -1 \\ ax + 1 & x \geq 1 \end{cases}$	۲۰

پ) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & x < 1 \\ ax + b & x = 1 \\ \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x > 1 \end{cases}$	ت) $f(x) = \begin{cases} x - a & x < 1 \\ 2x - 1 & x = 1 \\ ax^2 + b & x > 1 \end{cases}$
تابع $f(x) = [x]$ در چه بازه هایی پیوسته است؟	
ویژه حسابان ۱	
حد تابع $f(x) = \frac{1}{[x] - 2}$ را در نقطه هایی به طول ۲ و ۳ بررسی کنید.	
الف) بازه $(x + 1, 2x + 5)$ یک همسایگی عدد ۱ است. مجموعه مقادیر x را به دست آورید. ب) بازه $(x + 1, 2x + 5)$ یک همسایگی محذوف عدد ۱- است. x را به دست آورید.	
تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$ را در نظر بگیرید. الف) دامنه تابع را بدست آورید. ب) آیا تابع در همسایگی $1/99$ تعریف شده است؟ پ) این تابع در همسایگی محذوف کدام نقطه تعریف شده است که در هیچ همسایگی آن تعریف نشده است؟	
نمودار تابع f رسم شده است، حاصل $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(-x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(-x)$ پیدا کنید. 	
نمودار تابع f رسم شده است، حاصل هر یک از موارد زیر را پیدا کنید.  ۱) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$ ۲) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$ ۳) $\lim_{x \rightarrow 3^+} [f(x)] =$ ۴) $\lim_{x \rightarrow 3^-} [f(x)] =$ ۵) $\lim_{x \rightarrow 3^+} [f(x)] =$ ۶) $\lim_{x \rightarrow \frac{7}{2}} [f(x)] =$	
تابع $f(x) = a[-\frac{x}{2} + 1] + [2x]$ در نقطه $x = 2$ حد دارد. a کدام است؟	
حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\sin x] + \lim_{x \rightarrow \pi} [\cos x]$ را بیابید.	
حاصل حد زیر را در صورت وجود بدست آورید.	

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{[\sin x]}$$



نمودار تابع f رسم شده است، حاصل هر یک از موارد زیر را پیدا کنید.

۱) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f\left(-\frac{1}{x}\right) =$

۲) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f\left(\frac{f(x)}{2}\right) =$

۳) $f\left(\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)\right) =$

۴) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(f(x)) =$

۳۱

تابعی مانند $f(x)$ مثال بزنید که $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 + 2x} = \frac{2}{3}$

۳۲

$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sin x} \right]$ را به دست آورید.

۳۳

حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}} =$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4 \cos 2x}{x^2} =$ پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi} =$

۳۴

مقدار k را طوری بیابید که $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos kx}{x \sin x} = 8$

۳۵

اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax - a}{\sqrt{x + b} - 2} = 4$ باشد، a, b را به دست آورید.

۳۶

حاصل حدود زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x} =$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x^2 - x - 6|}{x - 3} =$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2|}{2 + x - x^2} =$

۳۷

تمرینات تکمیلی

حد تابع $y = x \sin \frac{1}{x}$ در نقطه $x = 0$ بدست آورید.

۳۸

حد تابع $y = \frac{1}{[x] - 3}$ را در $x = 3$ در صورت وجود بیابید.

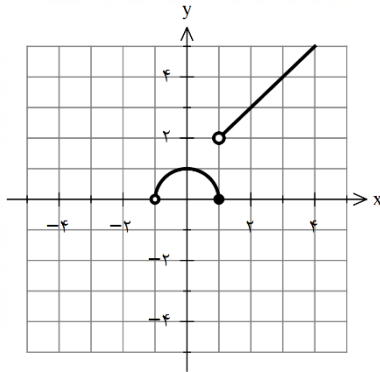
۳۹

آیا تابع $f(x) = x - [x]$ در $x = 1$ حد دارد؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه دهید.

۴۰

بارسم نمودار $f(x) = \sqrt{x - 2} + 1$ مقدار حدرا در اطراف $a = 2$ بررسی کنید.

۴۱

www.math-pilevar.ir با تکمیل جدول زیر مقدار حد تابع $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$ را در نقطه ی $x=1$ به دست آورید. <table border="1"> <tr> <td>X</td> <td>۰/۹۹</td> <td>۰/۹۹۹</td> <td>$\rightarrow 1 \leftarrow$</td> <td>۱/۰۰۱</td> <td>۱/۰۱</td> </tr> <tr> <td>F(x)</td> <td colspan="5">$\rightarrow ? \leftarrow$</td> </tr> </table>		X	۰/۹۹	۰/۹۹۹	$\rightarrow 1 \leftarrow$	۱/۰۰۱	۱/۰۱	F(x)	$\rightarrow ? \leftarrow$					۴۲
X	۰/۹۹	۰/۹۹۹	$\rightarrow 1 \leftarrow$	۱/۰۰۱	۱/۰۱									
F(x)	$\rightarrow ? \leftarrow$													
با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ مقادیر خواسته شده را به دست آورید.  الف) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ج) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ د) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$		۴۳												
نمودار تابعی را رسم کنید که تابع در ۲ تعریف نشده باشد ولی در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.		۴۴												
نمودار تابعی رسم کنید که در نقطه ۲- تعریف شده باشد، در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن غیر از مقدار تابع در عدد ۲- باشد.		۴۵												
حدود زیر را محاسبه کنید. ۱.۱. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 1}$ ۱.۲. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ ۱.۳. $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \times \tan\left(\frac{\pi}{\lambda} x\right)$ ۱.۴. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9}$ ۱.۵. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ ۱.۶. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$ ۱.۷. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$ ۱.۸. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \sin^2 3x}{2x^2}$ ۱.۹. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \sqrt{x+1}$ ۱.۱۰. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - 2}{x^2 - 4}$ ۱.۱۱. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{1 - \cos 2x}$ ۱.۱۲. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$ ۱.۱۳. $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x - [x])$ ۱.۱۴. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{[x] - 3}$ ۱.۱۵. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 1}$ ۱.۱۶. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x^2 - 5x - 24}$ ۱.۱۷. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{ \cos x }{x - \frac{\pi}{2}}$ ۱.۱۹. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x - \sin \Delta x}{\sqrt{1 - \cos 4x}}$ ۱.۲۰. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{x}}$ ۱.۲۱. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{2 - 2 \cos x}}$ ۱.۲۳. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\frac{x}{2}}$ ۱.۲۴. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - x^2}{x^2 + 6x + 5}$ ۱.۲۵. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 2 \cos 2x}{x^2}$		۴۶												
در تابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع در $x=2$ پیوسته باشد $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} & x < 2 \\ ax - 1 & x \geq 2 \end{cases}$		۴۷												

۴۸	پیوستگی توابع زیر را در $x=1$ بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & x > 1 \\ x - \frac{1}{2} & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \quad \text{ج) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \quad \text{ب) } f(x) = \begin{cases} 4-3x & x \leq 1 \\ 2x^2+1 & x > 1 \end{cases} \quad \text{الف) } f(x) = \begin{cases} 4-3x & x \leq 1 \\ 2x^2+1 & x > 1 \end{cases}$
۴۹	پیوستگی توابع زیر را در $x=-1$ بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq -1 \\ \frac{1}{x} & x < -1 \end{cases} \quad \text{ب) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{ x } & x \leq -1 \\ 2x+1 & x > -1 \end{cases} \quad \text{الف) } f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq -1 \\ \frac{1}{x} & x < -1 \end{cases}$
۵۰	a را چنان تعیین کنید که تابع زیر در $x=1$ پیوسته باشد. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x < 1 \\ a- x-1 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{ب) } f(x) = \begin{cases} x^2-ax+1 & x \leq 1 \\ x-2a & x > 1 \end{cases} \quad \text{الف) } f(x) = \begin{cases} x^2-ax+1 & x \leq 1 \\ x-2a & x > 1 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x-3a & x < 1 \\ 3x^2-4ax+2 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{د) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & 0 \leq x < 1 \\ [x]+a & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{ج) } f(x) = \begin{cases} x-3a & x < 1 \\ 3x^2-4ax+2 & x \geq 1 \end{cases}$
۵۱	پیوستگی توابع زیر را در نقطه $x=2$ بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} x^2(x-2) & x \leq 2 \\ 4-2x & x > 2 \end{cases} \quad \text{ب) } f(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & x \geq 2 \\ x-7 & x < 2 \end{cases} \quad \text{الف) } f(x) = \begin{cases} x^2(x-2) & x \leq 2 \\ 4-2x & x > 2 \end{cases}$
۵۲	a را چنان تعیین کنید تابع زیر در $x=0$ پیوسته باشد. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} & x > 0 \\ a+1 & x = 0 \\ [x+2] & x < 0 \end{cases}$
۵۳	تابع f به معادله زیر در نقطه $x=3$ پیوسته است $a+b$ را به دست آورید. $f(x) = \begin{cases} \frac{ x^2-9 }{x-3} + ax + 5 & x < 3 \\ 2 & x = 3 \\ \frac{2x-6}{x^2-bx+6} & x > 3 \end{cases}$
۵۴	آیا تابع $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ در $x=2$ پیوسته است؟ چرا؟
۵۵	پیوستگی تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

مهندسی