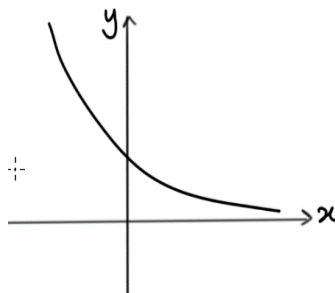
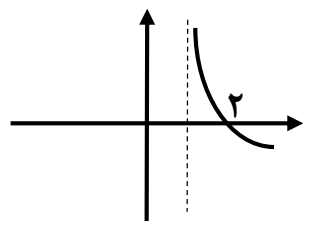


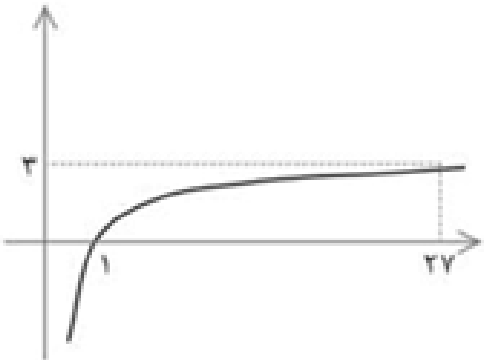
فصل سوم		
ردیف	سؤال و پاسخ	منطقه
۱	جاهای خالی را پر کنید. الف) در تابع $f(x) = a^x$ اگر $a > 1$؛ با افزایش مقدار x، مقادیر f می یابد. (کاهش، افزایش) ب) نمودار تابع $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$، به ازای $x > 0$، از نمودار تابع $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ است. (بالتر، پایین تر) پاسخ الف) افزایش ب) بالاتر	۶
۲	جاهای خالی را کامل کن. الف) در تابع $f(x) = a^x$ اگر $0 < a < 1$، با کاهش مقدار x مقادیر تابع می یابد. ب) برد تابع $y = 3^{-x}$ برابر است با: پاسخ الف) افزایش ب) $(0, \infty)$	۱۰
۳	حدود m را چنان تعیین کنید که نمودار تابع $f(x) = \left(\frac{m+2}{m-1}\right)^x$ به صورت مقابل باشد. پاسخ با توجه به نمودار داده شده، پایه باید عدد مثبت کوچکتر از یک باشد پس: $\left. \begin{aligned} 0 < \frac{m+2}{m-1} &\Rightarrow m < -2 \text{ or } m > 1 \\ \frac{m+2}{m-1} < 1 &\Rightarrow \frac{3}{m-1} < 0 \Rightarrow m < 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow m < -2$ 	۶

۶	نمودار تابع $f(x) = 2^x - 1$ را با رسم مراحل انتقال، رسم کنید. پاسخ $y = 2^x \rightarrow y = 2^x - 1 \rightarrow y = 2^x - 1$	۴
۱۰	دامنه تابع $f(x) = 5^{-x} + \sqrt{x-2}$ را تعیین نمایید پاسخ دامنه $y = 5^{-x}$ برابر است با $\mathbb{R}$ دامنه $y = \sqrt{x-2}$ برابر است با $x \geq 2$ بنابراین اشتراک دامنه ها: $[2, +\infty)$	۵
۱۰	برد تابع $f(x) = 3 - \left(\frac{1}{5}\right)^x$ را تعیین کنید. پاسخ $3 - \left(\frac{1}{5}\right)^x = y \rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x = 3 - y \xrightarrow{\left(\frac{1}{5}\right)^x > 0} 3 - y > 0 \rightarrow y < 3 \rightarrow (-\infty, 3]$	۶
۱۰	معادله $8^{2x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3}$ را حل نمایید. پاسخ $8^{2x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3} \rightarrow (2^3)^{2x} = (2^{-2})^{2x-3} \rightarrow 2^{6x} = 2^{-4x+6} \rightarrow 10x = 6 \rightarrow x = \frac{3}{5}$	۷
۱۰	نیمه عمر عنصری شش سال است. جرم اولیه این نمونه ۵ گرم است در چه مدتی این جرم به مقدار 5×2^{-4} گرم خواهد بود؟ پاسخ $m = \frac{m_0}{2^n} \rightarrow 5 \times 2^{-4} = 5 \times 2^{-n} \rightarrow n = 4 ; \quad n = \frac{t}{T} \rightarrow t = 24$	۸

۱۳	درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید الف) دامنه تابع $y = \log_5 (2x-3)$ در بازه $(0, +\infty)$ است. ب) برد تابع $y = \log_2 x$ مجموعه اعداد حقیقی است. پاسخ الف) نادرست ب) درست	۹
۱۳	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید اگر $f(x) = \log_3 2x + 3$ مقدار $f^{-1}(2)$ برابر با است. پاسخ $\log_3 2x + 3 = 2 \rightarrow 9 = 2x + 3 \rightarrow x = 3 \rightarrow f^{-1}(2) = 3$	۱۰
۱۳	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید الف) اگر $f(x) = 4 - \log_2 x$ مقدار $f(128)$ برابر با است. ب) حاصل $\log_2 256 + \log_3 27$ برابر با است. پاسخ الف) $f(128) = 4 - \log_2 128 = 4 - 7 = -3$ ب) $\log_2 256 + \log_3 27 = \log_{2^{-1}} 2^8 + \log_3 3^3 = -8 + 3 = -5$	۱۱
۱۳	گزینه صحیح را انتخاب کنید : الف) اگر $f(x) = 2^{5x-3}$ ضابطه تابع f^{-1} کدام است ؟ (۱) $y = \log_2 5x - 3$ (۲) $y = \log_2 5x$ (۳) $y = \frac{\log_2 5x + 3}{5}$ (۴) $y = \frac{(\log_2 x) + 3}{5}$ ب) اگر لگاریتم $4x$ در مبنای ۲ برابر ۵ باشد مقدار x کدام است ؟ (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) ۸ (۳) $\frac{25}{4}$ (۴) $\frac{4}{25}$ پاسخ الف) گزینه ۴ ب) گزینه ۲	۱۲
۱۳	نمودار تابع $f(x) = -\log_3 (x-1)$ را رسم کنید. پاسخ 	۱۳

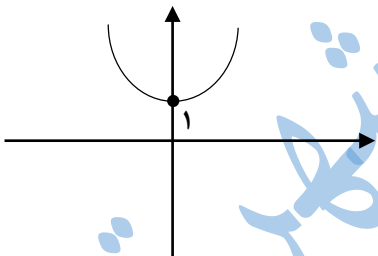
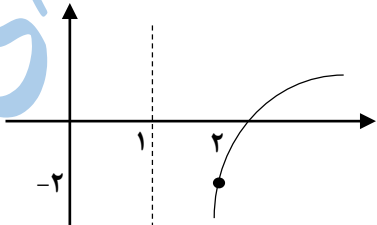
۱۴	دامنه تابع $f(x) = \log_2 x - 4 - x^2$ را بدست آورید.	پاسخ
۱۳	$\left. \begin{aligned} 4 - x^2 > 0 &\rightarrow -2 < x < 2 \\ 2x - 1 \neq 1 &\rightarrow x \neq 1 \\ 2x - 1 > 0 &\rightarrow x > \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \cap \left(\frac{1}{2}, 2 \right) - \{1\}$	
۱۵	نمودار $y = 3^x$ را ۲ واحد به چپ برده سپس ۱ واحد به پایین و در نهایت نسبت به خط $y = x$ قرینه می کنیم ضابطه تابع جدید کدام است ؟ پاسخ $y = 3^{x+2} - 1; y + 1 = 3^{x+2}$ $\log_3(y + 1) = x + 2 \rightarrow x = \log_3(y + 1) - 2 \rightarrow y = \log_3(x + 1) - 2$	
۱۶	اگر لگاریتم عدد ۸ در مبنای x برابر $\frac{1}{5}$ باشد لگاریتم چه عددی در مبنای x^2 برابر ۲ است ؟ پاسخ $\log_x 8 = \frac{3}{2} \rightarrow 3 \log_x 2 = \frac{3}{2} \rightarrow \log_x 2 = \frac{1}{2} \rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 2 \rightarrow x = 4$ $\log_{16} a = 2 \rightarrow a = 256$	
۱۷	وارون تابع $f(x) = 3^{-x+2} - 5$ به صورت $y = a \log_b(x-c) + d$ است حاصل $a-2b+c-d$ را بدست آورید. پاسخ $y + 5 = 3^{-x+2} \rightarrow \log_3(y + 5) = -x + 2 \rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \log_3(x + 5)$ $y = 2 - \log_3(x + 5) \rightarrow a = -1, b = 3, c = -5, d = 2$ $a - 2b + c - d = -14$	
۱۸	تابع $y = \log_{\frac{1}{2}}(ax+b)$ تابع وارونش را در نقطه $(2, 1)$ قطع می کند، a, b را بدست آورید پاسخ $\begin{cases} f(2) = 1 \rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 2a + b = 1 \rightarrow 2a + b = \frac{1}{2} \\ f(1) = 2 \rightarrow \log_{\frac{1}{2}} a + b = 2 \rightarrow a + b = \frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow a = \frac{1}{4}; b = 0$	

۱۹	معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید :	۱۲
	الف) $\log_{\Delta} (x^{-1}) = 1$ ب) $\log_{\Delta} \log_{\Delta} x = 0$ پاسخ الف) $\Delta^1 = x^{-1} \rightarrow x = \Delta^{-1}$ ب) $0 = \log_{\Delta} x \rightarrow 1 = \log_{\Delta} x \rightarrow \Delta^1 = x \rightarrow x = \Delta$	
۲۰	حاصل عبارت مقابل را بیابید :	۱۲
	$\Delta^{\log_{\Delta} 2}$ پاسخ $\Delta^2 \times \Delta^{\log_{\Delta} 2} = 2\Delta \times 2 = 4\Delta$	
۲۱	ثابت کنید :	۱۲
	$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ پاسخ $\log_b a = x \rightarrow b^x = a \rightarrow b = a^{\frac{1}{x}} \rightarrow \log_a b = \frac{1}{x} = \frac{1}{\log_b a}$	
۲۲	معادله زیر را حل کنید :	۱۲
	$x^{\log_{\Delta} x} = 62\Delta$ پاسخ $\log_x \Delta^6 = \log_{\Delta} x \rightarrow 6(\log_x \Delta) = \frac{1}{\log_{\Delta} x} \rightarrow (\log_x \Delta)^2 = \frac{1}{6} \rightarrow \log_x \Delta = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$ $\rightarrow \begin{cases} \log_x \Delta = \frac{1}{\sqrt{6}} \rightarrow \Delta = x^{\frac{1}{\sqrt{6}}} \rightarrow x = 62\Delta \\ \log_x \Delta = -\frac{1}{\sqrt{6}} \rightarrow \Delta = x^{-\frac{1}{\sqrt{6}}} \rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{\Delta} \rightarrow \\ x = \frac{1}{62\Delta} \end{cases}$	

۲۳	معادله زیر را حل کنید:	۱۲
	پاسخ $\log_a 2 = \frac{1}{\log_2 a} - \frac{1}{6}$ $\log_a 2 = (\log_a 4) - \frac{1}{6} \rightarrow \log_a 2 = 2(\log_a 2) - \frac{1}{6} \rightarrow \log_a 2 = \frac{1}{6} \rightarrow a^{\frac{1}{6}} = 2$ $\rightarrow a = 2^6 = 64$	
۲۴	نمودار $f(x) = \log_a x$ رسم شده است، مقدار $f^{-1}(2)$ را محاسبه کنید.  پاسخ $f(x) = \log_3 x \rightarrow f^{-1}(x) = 3^x \rightarrow$ $\rightarrow f^{-1}(2) = 3^2 = 9$	۱۲
۲۵	لگاریتم عددی در پایه ۹ از لگاریتم عکس مجذور آن عدد در پایه ۹ به اندازه ۴/۵ واحد بیشتر است، آن عدد را بیابید. پاسخ $\log_9 x = \log_9 \left(\frac{1}{x^2} \right) + 4.5 \rightarrow \log_9 x = -2 \log_9 x + 4.5 \rightarrow 3 \log_9 x = 4.5$ $\rightarrow \log_9 x = \frac{3}{2} \rightarrow (9)^{\frac{3}{2}} = x \rightarrow x = 27$	۱۲
۲۶	اگر $\log(x^2 - x + 1) + \log(x + 1) = 1$ باشد، $\log_3 x$ را به دست آورید. پاسخ $\log x^3 + 1 = 1 \rightarrow x^3 + 1 = 10 \rightarrow x^3 = 9 \rightarrow x = \sqrt[3]{9} \rightarrow \log_3(\sqrt[3]{9}) = \frac{2}{3}$	۱۲
۲۷	معادله $1 + \log_x(2x - 1) = \log_x(x + 2)$ را حل کنید. پاسخ $D = x > -2, \quad x > \frac{1}{2}, \quad x > 0, \quad x \neq 1 \Rightarrow D = \left(\frac{1}{2}, +\infty \right) - \{1\}$	۱۴

	$\log_x(x+2) - \log_x(2x-1) = 1 \Rightarrow \log_x \frac{x+2}{2x-1} = 1 \Rightarrow \frac{x+2}{2x-1} = x$ $\Rightarrow 2x^2 - x = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$ $\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ق ق}, \quad x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ غ ق ق}$	
۱۴	دستگاه معادلات: $\begin{cases} \log x^2 = 1 \cdot 1 - \log 5 \\ 3 \log_y x - \log_x y = 2 \end{cases}$ را حل کنید. پاسخ $\log x^2 = 1 \cdot \log 10 - \log 5 \Rightarrow 2 \log x = 1 \cdot \log 2 \Rightarrow 2 \log x = 2 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10$ $x = 10 \Rightarrow 3 \log_y 10 - \log_{10} y = 2 \Rightarrow 3 \log_y 10 - \frac{1}{\log_y 10} = 2, \log_y 10 = a$ $\Rightarrow 3a - \frac{1}{a} = 2 \Rightarrow$ $3a^2 - 2a - 1 = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \text{یا} \\ a = -\frac{1}{3} \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} \log_y 10 = 1 \Rightarrow y = 10 \\ \log_y 10 = -\frac{1}{3} \Rightarrow y^{-\frac{1}{3}} = 10 \Rightarrow y = 10^{-3} = 0/001 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 10 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x = 10 \\ y = 0/001 \end{cases}$	۲۸
۱۴	هر گاه داشته باشیم $\log_{10} \sqrt{x+1} = \log_{11} 10 \times \log_{12} 11 \times \log_{13} 12 \times \dots \times \log_{99} 98$ حاصل $\log_{\sqrt[3]{4}} x^2$ چقدر است. پاسخ $\log_{10} \sqrt{x+1} = \log_{10} 10 \Rightarrow \log_{10} \sqrt{x+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x+1} = (10)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x+1 = 10 \Rightarrow x = 9$ $x = 9 \Rightarrow \log_{\sqrt[3]{4}} x^2 = \log_{\sqrt[3]{4}} (9)^2 = \log_{\sqrt[3]{4}} 81 = \log_{\sqrt[3]{4}} 4^3 = \log_{\sqrt[3]{4}} 4^3 = \frac{-1}{\frac{1}{3}} = -3$	۲۹

۱۴	۳۰ نمودار تابع لگاریتمی $f(x) = \log_3 \sqrt{ax+b}$، محور عرضها را در نقطه ای به عرض یک و طولها را نیز در نقطه ای به طول ۲- قطع می کند، جواب معادله ی $f(x) = \frac{3}{2}$ را حساب کنید. پاسخ $\begin{cases} f(\cdot) = 1 \\ f(-2) = \cdot \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 \sqrt{b} = 1 \\ \log_3 \sqrt{-2a+b} = \cdot \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{b} = 3 \Rightarrow b = 9 \\ \sqrt{-2a+b} = 1 \Rightarrow -2a+9 = 1 \Rightarrow a = 4 \end{cases} \Rightarrow$ $f(x) = \log_3 \sqrt{4x+9}$ $f(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow \log_3 \sqrt{4x+9} = \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{4x+9} = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 4x+9 = 27 \Rightarrow$ $4x = 18 \Rightarrow x = \frac{9}{2} = 4.5$	
۱۴	۳۱ دامنه ی تابع لگاریتمی $y = \log(9-x^2) + \log x$ را بیابید. پاسخ $\begin{cases} 9-x^2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 < x < 3 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 3 \Rightarrow D = (0, 3)$	
۱۴	۳۲ اگر $f(x) = \frac{4^x-1}{2^x}$ باشد، مقدار $f(\log 2) + f(\log \frac{1}{2})$ را بدست آورید. پاسخ $f(x) = \frac{4^x-1}{2^x} = \frac{(2^2)^x-1}{2^x} = \frac{(2^x)^2-1}{2^x} = \frac{(2^x)^2}{2^x} - \frac{1}{2^x} = 2^x - \frac{1}{2^x} = 2^x - 2^{-x}$ $f(\log 2) + f(\log \frac{1}{2}) = 2^{\log 2} - 2^{-\log 2} + 2^{\log \frac{1}{2}} - 2^{-\log \frac{1}{2}}$ $= 2^{\log 2} - 2^{-\log 2} + 2^{\log 2^{-1}} - 2^{-\log 2^{-1}} =$ $2^{\log 2} - 2^{-\log 2} + 2^{-\log 2} - 2^{\log 2} = 0$	
۱۴	۳۳ حاصل $\log_{\sqrt{x\sqrt{x}}} x\sqrt{x\sqrt{x}}$ را بدست آورید. ($x \neq 0$, $x > 0$) پاسخ $\log_{\sqrt{x\sqrt{x}}} x\sqrt{x\sqrt{x}} = y \Rightarrow \left(\sqrt{x\sqrt{x}}\right)^y = x\sqrt{x\sqrt{x}} \Rightarrow \left(\sqrt[2]{x\sqrt{x}}\right)^y = x\sqrt{x\sqrt{x}}$ $\Rightarrow (\sqrt[2]{x^3})^y = x\sqrt{x\sqrt{x}}$	

	$\Rightarrow (\sqrt{x})^y = \sqrt[4]{x^y} \Rightarrow x^{\frac{y}{2}} = x^{\frac{y}{4}} \Rightarrow \frac{y}{2} = \frac{y}{4} \Rightarrow 4y = 14 \Rightarrow y = \frac{7}{2}$	
۱۳	درستی یا نادرستی عبارت "تابع $f(x) = \log_3 x$ تابعی یک به یک است." را مشخص کنید. پاسخ: درست است	۳۴
۱۳	جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. الف) اگر $\log 4 = 0/6$ و $\log 3 = 0/48$ مقدار $\log 0/15$ برابر با است. پاسخ الف) $0/82$	۳۵
۱۳	اگر تابع $f(x) = \left(\frac{3-k}{k+2}\right)^{x+1}$ تابع نمائی باشد، حدود k را بدست آورید. پاسخ $\frac{3-k}{k+2} > 0 \rightarrow -2 < k < 3$	۳۶
۱۳	نمودار توابع زیر را رسم کنید. الف) $y = 2^{ x }$ ب) $y = \log_2(x-1) - 2$ پاسخ الف)  ب) 	۳۷
۱۳	معادله زیر را حل کنید. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-5x+6} \geq 1$ پاسخ $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-5x+6} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 \leq 0 \rightarrow (x-2)(x-3) \leq 0 \rightarrow x \Rightarrow (2 \text{ و } 3)$	۳۸
۱۳	دامنه توابع زیر را بدست آورید. الف) $f(x) = \sqrt{2^4 x - x^2} - 8$ ب) $g(x) = \sqrt{1 - \log(x^2 - 3x)}$ پاسخ	۳۹

	الف) $2^{4x-x^2} > 2^3 \rightarrow x^2 - 4x + 3 < 0 \rightarrow 1 < x < 3$ ب) $\log_{10}(x^2 - 3x) < \log_{10} 10 \rightarrow \frac{x^2 - 3x - 10}{(x-5)(x+2)} < 0 \rightarrow -2 < x < 5$	
۱۳	حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید. الف) $\log_{(\sqrt{2}-1)}(3 + 2\sqrt{2})$ ب) $2 \times 10^{\frac{1}{2}(\log 9 - \log 2)}$ پ) $(a^{\log_4 3})^{\log_a 4}$ الف) $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2} + 1)^2 = 2 \log_{(\sqrt{2}+1)}^{-1} \sqrt{2} + 1 = -2$ ب) $2 \times (10^2)^{\frac{1}{2}(\log_2 9)} = 2 \times 10^{\log_2 \frac{9}{2}} = 2 \times \frac{9}{2} = 9$ پ) $(a)^{\frac{\log 3}{\log 4} \times \frac{\log 4}{\log a}} = a^{\log_a 3} = 3$ پاسخ	۴۰

گروه ریاضی شهر تهران