

هندسه (۲)

رشته ریاضی و فیزیک

پایه یازدهم

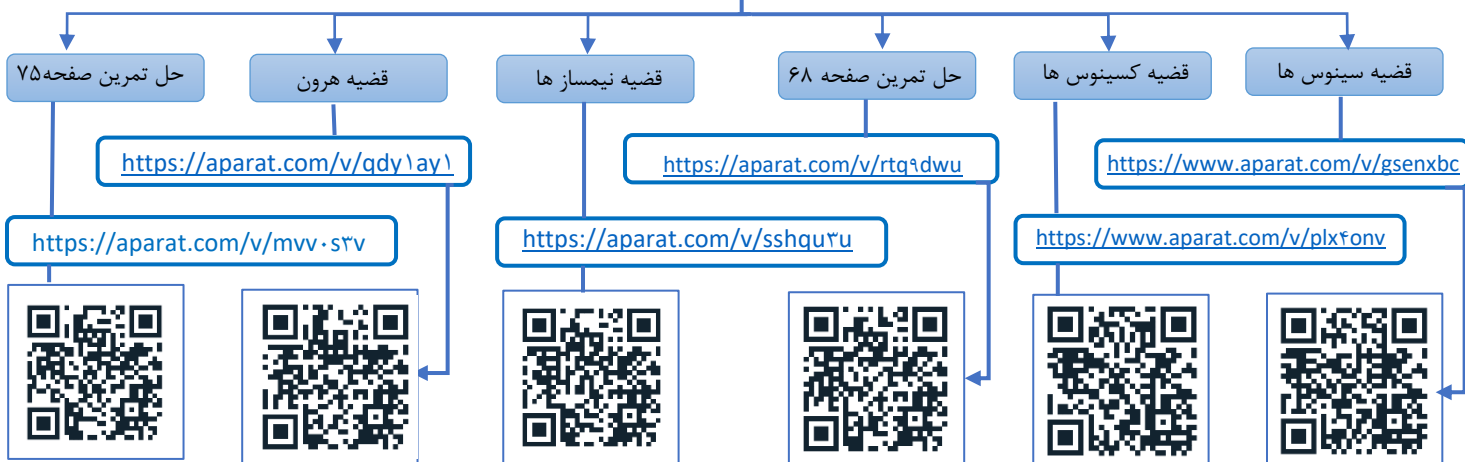
برای تماشای ویدیوهای آموزشی هندسه ۲ (همین جزوه) می توانید به یکی از لینک های زیر مراجعه کنید.



تهیه کننده : رقیه پيله ور - دبیر ریاضی ناحیه دو اردبیل



هندسه ۲، فصل ۳، در آپارات



سایت

www.math-pilevar.ir



اپلیکیشن pimath

دانلود اپلیکیشن



کانال تلگرام

<https://t.me/pimath1>





فصل سوم

روابط طولی در مثلث

قضیه سینوس ها

یادآوری

منظور از روابط طولی، رابطه هایی است که در مورد اندازه های پاره خط ها و زاویه ها در شکل های مختلف، بحث می کند. در سال گذشته روابط طولی زیر را در مثلث قائم الزاویه دیدیم:

$$AB^2 = BC \cdot BH \quad \text{۱} \checkmark$$

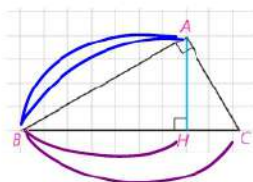
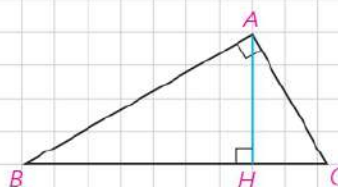
$$AC^2 = BC \cdot CH \quad \text{۲} \checkmark$$

$$AH^2 = BH \cdot CH \quad \text{۳} \checkmark$$

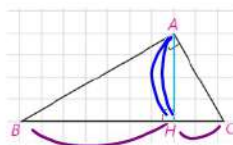
$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad \text{۴} \checkmark$$

$$AB \cdot AC = BC \cdot AH \quad \text{۵} \checkmark$$

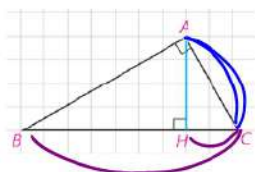
اینک به ادامه بحث در مثلث های دلخواه می پردازیم.



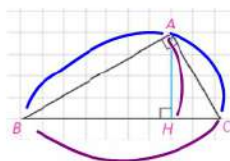
$$AB^2 = BH \cdot BC$$



$$AH^2 = BH \cdot CH$$



$$AC^2 = CH \cdot BC$$



$$AB \cdot AC = AH \cdot BC$$

۱ فعالیت

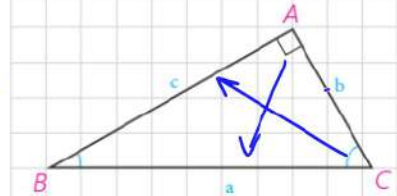
در کتاب ریاضی ۱ (پایه دهم) با تعریف نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه آشنا شدید. با توجه به تعریف سینوس زاویه در مثلث قائم الزاویه ABC ، جاهای خالی را پر کنید:

$$\frac{\sin B}{1} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = a$$

$$\frac{\sin C}{1} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = a$$

$$\sin A = \sin 90^\circ = \frac{a}{a} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = a$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{منابع مقابل}}{\text{وتر}}$$



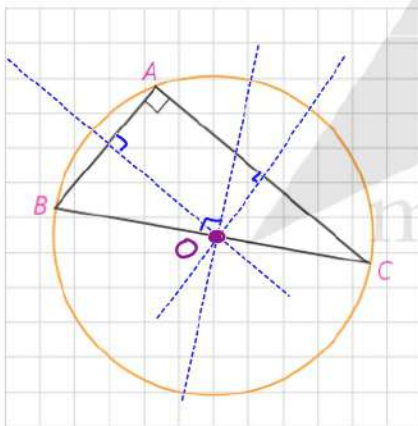
بنابراین داریم:

در هر مثلث قائم الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع ... به سینوس زاویه ... برابر است با اندازه وتر. مثلث

مقابل به آن

۲ فعالیت

در کتاب هندسه ۱ دیدیم که عمود منصف های اضلاع هر مثلث در یک نقطه هم رس اند و در این کتاب دیدیم که این نقطه، مرکز دایره محیطی مثلث است. دایره محیطی مثلث قائم الزاویه ABC را رسم می کنیم. مرکز این دایره، کجاست و چرا قطر آن با وتر مثلث برابر است؟



محل برخورد عمود منصف های اضلاع مثلث قائم الزاویه وسط وتر

است پس این نقطه مرکز دایره محیطی مثلث است

$$\widehat{A} = 90^\circ = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 180^\circ$$

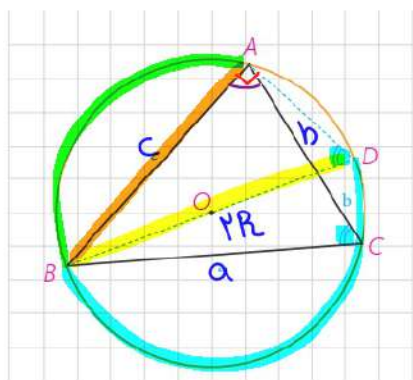
وتر BC دایره را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند پس قطر دایره محیطی مثلث می باشد

با توجه به نتیجه فعالیت (۱) می توانیم بگوییم:

در هر مثلث قائم الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه رو به آن ضلع برابر است با اندازه قطر..... دایره محیطی مثلث.

اکنون نشان می دهیم این نتیجه گیری برای هر مثلث دلخواه نیز درست است.

حالت اول: در مثلث دلخواه ABC ($\hat{A} < 90^\circ$) ثابت کنید: نسبت اندازه ضلع BC به سینوس زاویه $\hat{A}$ برابر است با



اندازه قطر دایره محیطی مثلث.

قطر BD را رسم، زاویه BAD را به ۹۰ درجه می بینیم.

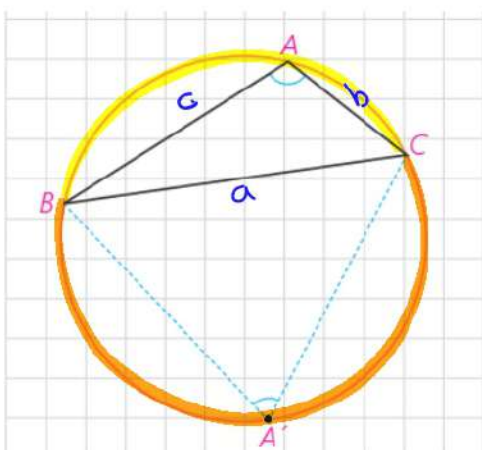
$$\hat{D} = \hat{C} = \frac{\widehat{BA}}{r}$$

$$\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\sin C = \sin D = \frac{AB}{BD} = \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{\sin C}{1} = \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{a}{\sin A} = 2R$$

حالت دوم: در مثلث دلخواه ABC ($\hat{A} > 90^\circ$) ثابت کنید: نسبت اندازه ضلع BC به سینوس زاویه $\hat{A}$ برابر است با

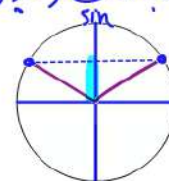


اندازه قطر دایره محیطی مثلث.

$$A + A' = \frac{\widehat{BA'C}}{r} + \frac{\widehat{BAC}}{r} = \frac{360^\circ}{r} = 180^\circ \Rightarrow A' = 180^\circ - A$$

۱- زاویه A' کو صلیب از ۹۰ درجه است (چون $A > 90^\circ$)

$$\sin A' = \sin (180^\circ - A)$$



$$\sin A = \sin A' \quad ۲$$

$$\sin A = \sin A' = \frac{a}{2R} \Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R}$$

۳ فعالیت

مثلت دلخواه ABC ($\hat{A} < 90^\circ$) و دایره محیطی آن به مرکز O را در نظر می گیریم. قطر BD را رسم، و D را به A وصل می کنیم.

۱- زوایای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ چرا با هم برابرند؟ روی یک کمان برابر هستند

اندازه آنها برابر است با نصف $\widehat{BA}$.

۲- چرا مثلث ABD در رأس A قائم الزویه است؟ $\hat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

۳- با توجه به دو قسمت قبل، داریم:

$$\sin C = \sin D \text{ و } \sin D = \frac{c}{BD} \Rightarrow \sin C = \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = 2R$$

۴- به طور مشابه خواهیم داشت:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R, \quad \frac{b}{\sin B} = 2R$$

۵- حال مثلث ABC ($\hat{A} > 90^\circ$) را در نظر بگیرید. نقطه دلخواه A' روی کمان

BC را به C و B وصل می کنیم. زوایای $\hat{A}$ و $\hat{A}'$ نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟ مکمل هستند.

$\hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ$ بنابراین $\hat{A}'$ زاویه ای حاده است.

$$\hat{A} + \hat{A}' = \frac{\widehat{BA'C}}{2} + \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

با توجه به آنچه از مثلثات می دانید، جاهای خالی را پر کنید:

$$\sin A = \sin(180^\circ - A') = \sin A'$$

در مثلث $A'BC$ ، طبق نتیجه قسمت (۳) می توانیم بنویسیم:

$$\frac{a}{\sin A'} = 2R \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$$

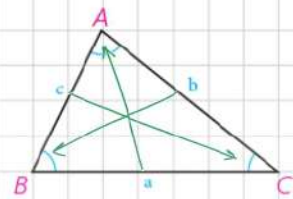
نتیجه

در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبرو به آن برابر است با قطر دایره محیطی مثلث

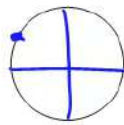
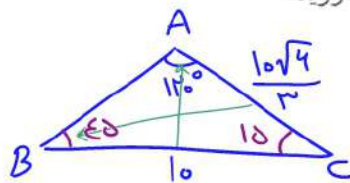
قضیه سینوس ها: در مثلث ABC با اضلاع $BC=a$ ، $AC=b$ و $AB=c$ داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.



مثال ۱: در مثلث ABC، $BC=10\text{ cm}$ و $\hat{A}=12^\circ$ و $AC=\frac{10\sqrt{6}}{3}$ مقدار شعاع دایره محیطی مثلث و اندازه زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را به دست آورید.



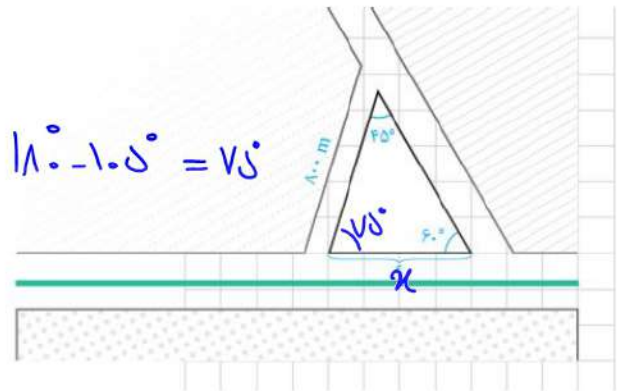
$$(180 - 40)$$

$$\frac{10}{\sin 12^\circ} = \frac{\frac{10\sqrt{6}}{3}}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{\sin 12^\circ \times \frac{10\sqrt{6}}{3}}{10} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{10\sqrt{6}}{3}}{10} = \frac{\frac{10\sqrt{18}}{6}}{10} = \frac{10\sqrt{18}}{60} = \frac{\sqrt{18}}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ$$

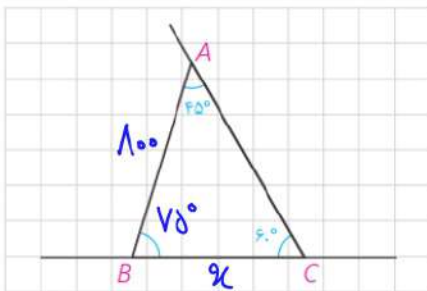
$$\hat{C} = 180^\circ - (12^\circ + 45^\circ) = 180^\circ - 57^\circ = 123^\circ$$

$$\frac{10}{\sin 12^\circ} = 2R \Rightarrow \frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R \Rightarrow \frac{10 \times 2}{\sqrt{2}} = 2R \Rightarrow R = \frac{10}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2}$$

مثال ۲: از یک بلوار افقی، یک خیابان فرعی باریک با زاویه 6° جدا شده است. اکنون شهرداری منطقه می خواهد یک خیابان فرعی دیگر به طول 100 متر بنا کند تا با زاویه 45° از خیابان فرعی اول جدا، و به بلوار منتهی شود. این خیابان از چه فاصله ای از رأس زاویه 6° باید شروع شود و با بلوار چه زاویه ای می سازد؟



$$18^\circ - 10.5^\circ = 7.5^\circ$$

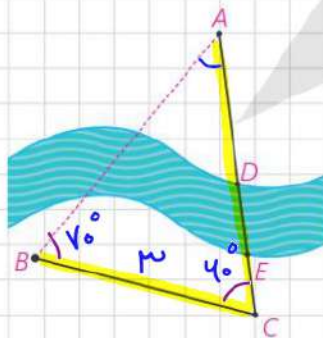


$$\frac{x}{\sin 48^\circ} = \frac{100}{\sin 4^\circ} \Rightarrow x = \frac{100 \times \sin 48^\circ}{\sin 4^\circ} =$$

$$x = \frac{100 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{100\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{100\sqrt{6}}{3} \approx 453.2$$

کاردرکلاس

می خواهیم روی یک رودخانه عمیق بین دو نقطه A و B در دو طرف رودخانه، پلی بنا کنیم. برای محاسبات مربوط به احداث پل، باید فاصله ابتدا و انتهای آن (یعنی طول AB) را به دست بیاوریم؛ اما امکان اندازه گیری مستقیم (به دلیل وجود رودخانه) وجود ندارد. برای این کار از نقطه A در جهتی حرکت می کنیم تا با عبور از قسمت کم عمق رودخانه (DE) به نقطه C برسیم و طول BC را اندازه گیری می کنیم؛ سپس با زاویه یاب (تئودولیت) زاویه دید AC از نقطه B ($\hat{B}$) و زاویه دید AB از C ($\hat{C}$) را اندازه می گیریم. به صورت زیر نشان دهید با داشتن طول BC و زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ می توان فاصله AB را به دست آورد:



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\hat{A} = 180 - (\hat{B} + \hat{C})$$

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{BC}{\sin (180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}))} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AB = \frac{BC \times \sin C}{\sin (\hat{B} + \hat{C})}$$

اگر $BC = 3\text{km}$ و $\hat{B} = 70^\circ$ و $\hat{C} = 60^\circ$ به کمک ماشین حساب طول AB را به دست آورید.

$$AB = \frac{BC \times \sin C}{\sin (\hat{B} + \hat{C})} = \frac{3 \times \sin 40^\circ}{\sin (70^\circ + 40^\circ)} = \frac{3 \times 0.64}{0.94} \approx 2.02$$

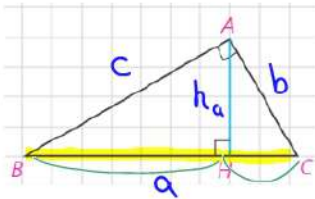
$$\sin 40^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.87$$

$$\sin 130^\circ = 0.77$$

تمرین

۱- ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) با ارتفاع $AH = h_a$ داریم:

$$\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

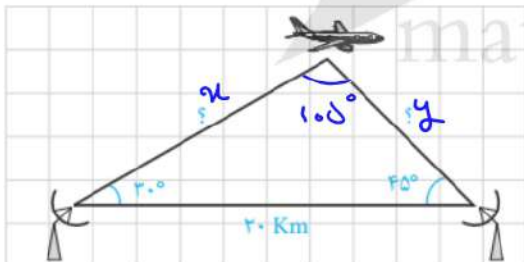


$$c^2 = BH \cdot a$$

$$b^2 = CH \cdot a$$

$$h_a^2 = BH \cdot CH$$

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1 \times BH}{CH \cdot a \times BH} + \frac{1 \times CH}{BH \cdot a \times CH} = \frac{BH + CH}{CH \cdot BH \cdot a} = \frac{a}{CH \cdot BH \cdot a} = \frac{1}{CH \cdot BH} = \frac{1}{h_a^2}$$



۲- دو ایستگاه رادار، که در فاصله ۲۰ کیلومتری از هم واقع اند، هواپیمایی را با زاویه های 30° و 45° درجه رصد کرده اند. فاصله هواپیما را از دو ایستگاه به دست آورید.

$$180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ$$

$$\sin 105^\circ = .94$$

$$\sin 30^\circ = .5$$

$$\sin 45^\circ = .707$$

$$\frac{y}{\sin 30^\circ} = \frac{20}{\sin 105^\circ} = \frac{x}{\sin 45^\circ} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{y}{\sin 30^\circ} &= \frac{20}{\sin 105^\circ} \Rightarrow \frac{y}{.5} = \frac{20}{.94} \Rightarrow y = \frac{20 \times .5}{.94} \approx 10.64 \\ \frac{20}{\sin 105^\circ} &= \frac{x}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{20}{.94} = \frac{x}{.707} \Rightarrow x = \frac{20 \times .707}{.94} \approx 15.11 \end{aligned} \right.$$

درس دوم

قضیه کسینوس ها

می دانیم که در مثلث قائم الزویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) با داشتن طول های دو ضلع $(AB=c)$ و $(AC=b)$ می توانیم اندازه وتر مثلث $(BC=a)$ را بر حسب b و c به دست آوریم: $a^2 = b^2 + c^2$ حال می بینیم که اگر $\hat{A}$ مساوی 90° هم نباشد، می توانیم این کار را انجام دهیم.

۱ فعالیت

در مثلث ABC ($\hat{A} < 90^\circ$)، ارتفاع BH را رسم کرده ایم. با توجه به تعریف نسبت های مثلثاتی در مثلث های قائم الزویه، جاهای خالی را پر کنید:

$$\cos A = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c \cdot \cos A \quad \text{و} \quad CH = b - AH = b - c \cdot \cos A$$

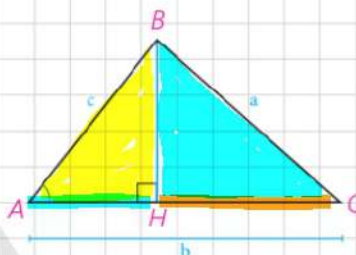
$$\sin A = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c \cdot \sin A$$

$$\Delta BHC: BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow a^2 = (c \cdot \sin A)^2 + (b - c \cdot \cos A)^2$$

$$a^2 = c^2 \sin^2 A + b^2 - 2bc \cos A + c^2 \cos^2 A$$

$$= c^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) + b^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos A$$

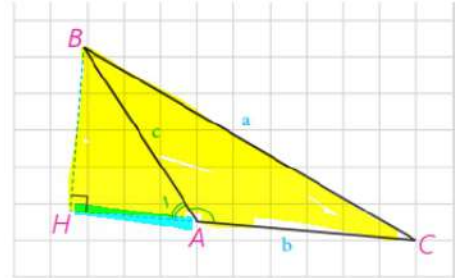


$$(b - c \cos A)^2$$

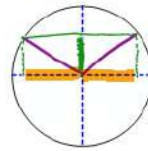
حال به کمک اتحاد های جبری و اتحاد مثلثاتی $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ نشان دهید:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

اکنون در مثلث ABC ($\hat{A} > 90^\circ$) ارتفاع BH را در بیرون مثلث رسم می‌کنیم.
اگر $\hat{A}_1$ زاویه خارجی رأس A باشد با توجه به اینکه $\hat{A}_1 = 180^\circ - \hat{A}$ داریم:
 $\sin A_1 = \dots$ و $\cos A_1 = \dots$ و در مثلث ABH نیز با توجه به تعریف نسبت‌های
مثلثاتی می‌توان نوشت:



$$\hat{A} + \hat{A}_1 = 180^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin A = \sin A_1 \\ \cos A_1 = -\cos A \end{cases}$$



$$\sin A_1 = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c \cdot \sin A_1 \xrightarrow{\sin A = \sin A_1} BH = c \cdot \sin A$$

$$\cos A_1 = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c \cdot \cos A_1 \xrightarrow{\cos A_1 = -\cos A} AH = -c \cdot \cos A$$

$$\Delta BHC: a^2 = BH^2 + CH^2$$

$$CH = b + AH = b - c \cdot \cos A$$

$$a^2 = (c \cdot \sin A)^2 + (b - c \cdot \cos A)^2 = c^2 \cdot \sin^2 A + b^2 - 2bc \cos A + c^2 \cdot \cos^2 A$$

$$= c^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) + b^2 - 2bc \cdot \cos A = c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos A$$

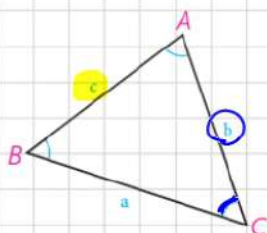
math-pilevar.ir

و با ساده کردن عبارت‌ها نشان دهید:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

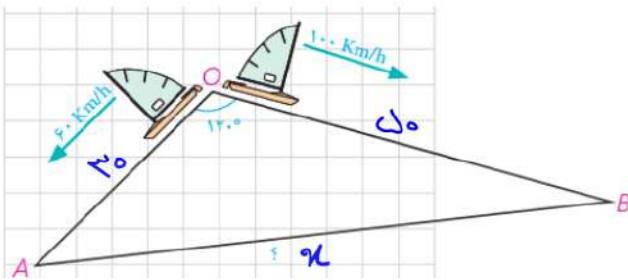
سؤال: در حالتی که زاویه A قائمه باشد، این رابطه به چه صورت در می‌آید؟

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 90^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$



قضیه کسینوس‌ها: در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$



مثال: دو قایق از یک نقطه در دریاچه‌ای با سرعت‌های 40 km/h و 100 km/h و با زاویه 120° از هم دور می‌شوند. نیم ساعت بعد دو قایق در چه فاصله‌ای از یکدیگر هستند؟

$$V_1 = \frac{d_1}{t} \Rightarrow d_1 = V_1 \cdot t = 40 \times \frac{1}{7} = 40$$

$$V_2 = \frac{d_2}{t} \Rightarrow d_2 = V_2 \cdot t = 100 \times \frac{1}{7} = 100$$

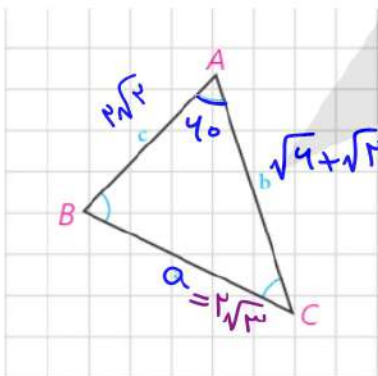
$$x^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2 \times d_1 \times d_2 \times \cos 120^\circ$$

$$x^2 = 1600 + 10000 - 2 \times 40 \times 100 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 1600 + 10000 + 4000 = 15600$$

$$x = \sqrt{15600} = 125$$

$$\cos(180 - 60) = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$$

کاردکلاس



در مثلث ABC ، $AB = 2\sqrt{2}$ و $AC = \sqrt{4} + \sqrt{2}$ و $\hat{A} = 40^\circ$
۱- طول ضلع BC را به کمک قضیه کسینوس‌ها به دست آورید.

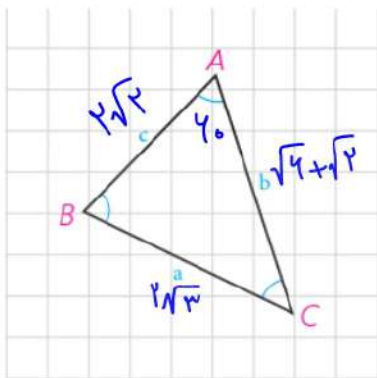
$$a^2 = (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{4} + \sqrt{2})^2 - 2(2\sqrt{2})(\sqrt{4} + \sqrt{2}) \times \cos 40^\circ$$

$$a^2 = 16 + 4 + 2\sqrt{4} + 2 - 2(2\sqrt{2} + 4) \times \frac{1}{2}$$

$$a^2 = 16 + 2\sqrt{4} + 2 - 2\sqrt{4} - 4 = 14$$

$$a = \sqrt{14} = 2\sqrt{3}$$

↓
 4×3



۲- اندازه $\hat{C}$ را به کمک قضیه سینوس ها به دست آورید و از آنجا اندازه $\hat{B}$ را هم بیابید.

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 40^\circ}$$

$$\sin C = \frac{2\sqrt{2} \times \sin 40^\circ}{2\sqrt{3}} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2} \times \cancel{2}\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cancel{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ$$

$$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 180^\circ - (40^\circ + 45^\circ) = 95^\circ$$



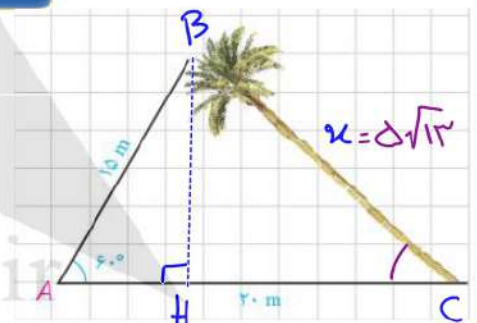
۱- یک درخت کج از نقطه A روی زمین، که در فاصله ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویه 60° دیده می شود. اگر فاصله A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است:

$$x^2 = 15^2 + 20^2 - 2 \times 15 \times 20 \times \cos 60^\circ$$

$$x^2 = 225 + 400 - 2 \times 300 \times \frac{1}{2} = 425 - 300 = 125$$

$$x = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

(الف) طول درخت



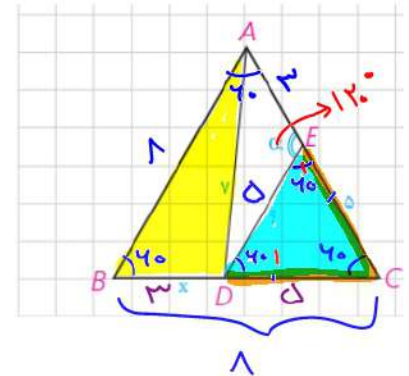
(ب) سینوس زاویه ای که درخت با سطح زمین می سازد.

$$\frac{5\sqrt{5}}{\sin 60^\circ} = \frac{15}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{15 \times \sin 60^\circ}{5\sqrt{5}} = \frac{\cancel{15} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\cancel{5}\sqrt{5}} = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \approx 1.72 \Rightarrow C = 49^\circ$$

(پ) فاصله نوک درخت از زمین

$$\sin 60^\circ = \frac{BH}{15} \Rightarrow BH = 15 \times \sin 60^\circ = 15 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

۲- در مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه D، که به فاصله ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟ (CD > BD) نقطه E، که به فاصله ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازه زاویه AED چند درجه است؟



$$\triangle ABD: V^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \cdot \cos 40^\circ$$

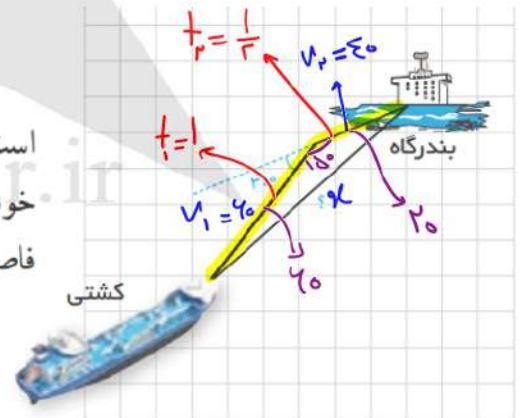
$$49 = 4 + 1 - 2 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \Rightarrow 1^2 - 1 + 15 = 0$$

$$(1-3)(1-5) = 0 \Rightarrow 1 = 3 \quad \text{و} \quad 1 = 5$$

$$DC = EC \Rightarrow \text{مثلث EDC متساوی الساقین} \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{D}_1 \Rightarrow \frac{180 - 40}{2} = 70^\circ$$

$$\triangle EDC \text{ متساوی الاضلاع} \Rightarrow ED = 5$$

۳- یک کشتی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با ۳۰° انحراف به راست با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می‌گیرد. فاصله بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟

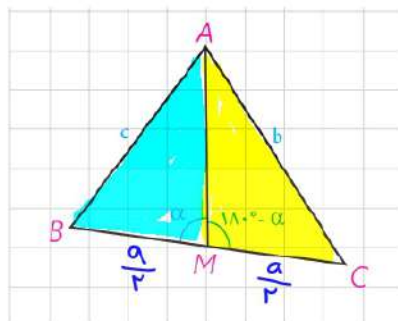


$$v_1 = \frac{d}{t_1} \Rightarrow d = v_1 t_1 = 60 \times 1 = 60$$

$$v_2 = \frac{d}{t_2} \Rightarrow d = v_2 t_2 = 40 \times \frac{1}{2} = 20$$

$$x^2 = 60^2 + 20^2 - 2 \times 60 \times 20 \times \cos 150^\circ =$$

$$x^2 = 3600 + 400 - 2 \times 1200 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4000 + 1200\sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{4000 + 1200\sqrt{3}} \approx 77.99$$



۲- در مثلث ABC، میانه AM را رسم کرده ایم ($MB = MC = \frac{a}{2}$). با نوشتن قضیه کسینوس ها در دو مثلث AMB و AMC، b^2 و c^2 را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2} \quad (\text{قضیه میانه ها})$$

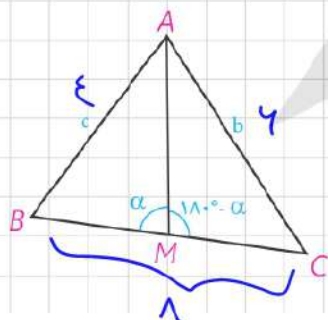
$$\triangle AMC : b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + AM^2 - 2 \times \frac{a}{2} \times AM \times \cos(180 - \alpha)$$

$$\triangle AMB : c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + AM^2 - 2 \times \frac{a}{2} \times AM \times \cos \alpha$$

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM^2 - a \times AM (\cos(180 - \alpha) + \cos \alpha)$$

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM^2$$

در حالت خاص $AB=4$ و $AC=6$ و $BC=8$ ، طول میانه AM را به دست آورید.



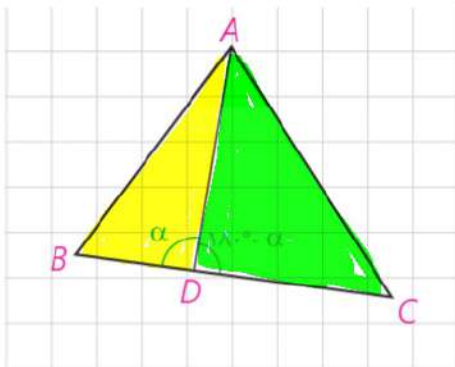
$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2} \quad (\text{قضیه میانه ها})$$

$$4^2 + 6^2 = 2AM^2 + \frac{8^2}{2}$$

$$34 + 16 = 2AM^2 + 32$$

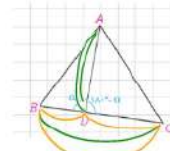
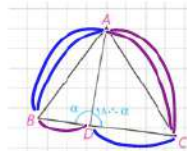
$$52 = 2AM^2 + 32$$

$$2AM^2 = 20 \Rightarrow AM^2 = 10 \Rightarrow AM = \sqrt{10}$$



۵- در مثلث ABC، نقطه دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث ADB و ADC درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC \quad (\text{قضیه استوارت})$$



$$\triangle ABD : AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2 \times BD \times AD \times \cos \alpha$$

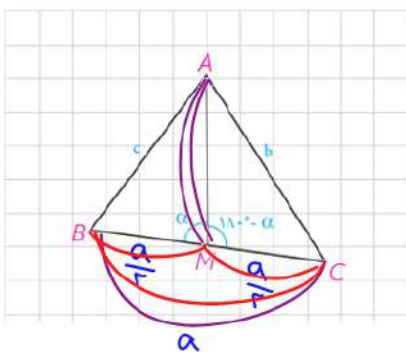
$$\triangle ADC : AC^2 = DC^2 + AD^2 - 2 \times DC \times AD \times \cos (180^\circ - \alpha)$$

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD =$$

$$(BD^2 + AD^2 - 2 \times BD \times AD \times \cos \alpha) \times DC + (DC^2 + AD^2 - 2 \times DC \times AD \times \cos (180^\circ - \alpha)) \times BD$$

$$\cancel{BD^2 \times DC} + \cancel{AD^2 \times DC} - \cancel{2 \times BD \times AD \times DC \times \cos \alpha} + \cancel{DC^2 \times BD} + \cancel{AD^2 \times BD} - \cancel{2 \times DC \times AD \times BD \times \cos (180^\circ - \alpha)}$$

$$AD^2 \underbrace{(DC + BD)}_{BC} + BD \times DC \underbrace{(BD + DC)}_{BC} = AD^2 \times BC + BD \times DC \times BC$$



به کمک قضیه استوارت، درستی قضیه میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2} \quad (\text{قضیه میانه‌ها})$$

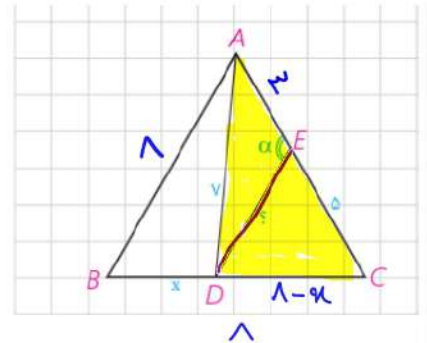
$$b^2 \times \frac{a}{2} + c^2 \times \frac{a}{2} = AM^2 \times a + \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times a$$

$$\cancel{\frac{a}{2}} (b^2 + c^2) = \cancel{\frac{a}{2}} (2AM^2 + \frac{a^2}{2})$$

$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2}$$

۶- مسئله ۲ را بار دیگر، این بار به کمک قضیه استوارت حل کنید.

۲- در مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه D، که به فاصله ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله ای دارد؟ (CD > BD) نقطه E، که به فاصله ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله ای است؟ اندازه زاویه AED چند درجه است؟



$$\triangle ABC : 8^2 \times (1-x) + 8^2 \times x = 7^2 \times 8 + x \times (1-x) \times 8$$

$$8^2 (1-x+x) = 8(7^2 + 1x - x^2)$$

$$48 = 49 + 1x - x^2$$

$$x^2 - 1x + 15 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=5 \end{cases}$$

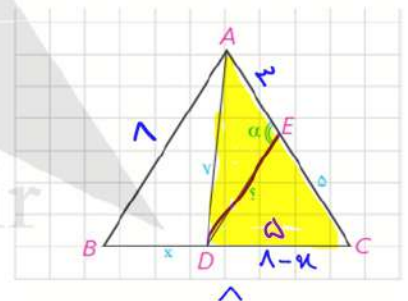
$$x=3 \rightarrow DC = 8-3=5$$

$$7^2 \times 5 + 5^2 \times 3 = DE^2 \times 8 + 3 \times 5 \times 8$$

$$245 + 75 = DE^2 \times 8 + 120$$

$$320 - 120 = 8DE^2 \Rightarrow 1DE^2 = 200 \Rightarrow DE^2 = 20$$

$$DE = 5$$



درس سوم

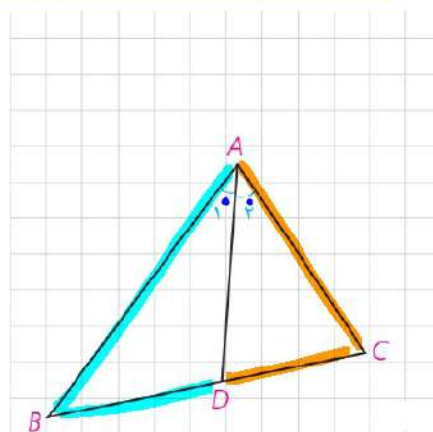
قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها

۱- قضیه نیمسازهای زوایای داخلی

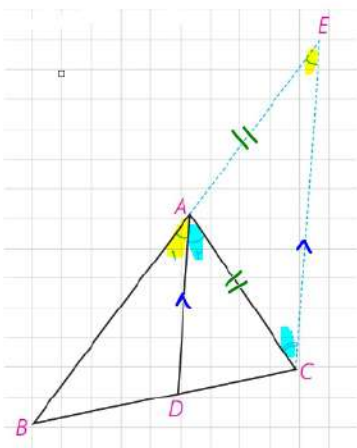
قضیه ۱: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} : \text{فرض}$$

$$\text{حکم} : \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$



اثبات: از نقطه C خطی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطه E قطع کند.



$$AD \parallel BC \xrightarrow{\text{موازی } AE} \widehat{A_1} = \widehat{E}$$

$$AD \parallel BC \xrightarrow{\text{موازی } AC} \widehat{A_2} = \widehat{C}$$

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \widehat{E} = \widehat{C} \Rightarrow AE = AC$$

↓
متساوی الساقین $\triangle AEC$

$$\triangle BEC \xrightarrow[\text{AD} \parallel EC]{\text{تالس}} \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC} \xrightarrow{AE=AC} \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

اثبات: مطابق شکل از نقطه C خطی موازی نیمساز AD رسم می کنیم تا امتداد AB را در نقطه E قطع کند.

$$EC \parallel AD \xrightarrow{\text{مربع } AE} \hat{A}_1 = \hat{E}$$

$$EC \parallel AD \xrightarrow{\text{مربع } AC} \hat{C} = \hat{A}_2 \quad \text{چرا } \hat{A}_1 = \hat{E} \text{ و چرا } \hat{A}_2 = \hat{C}?$$

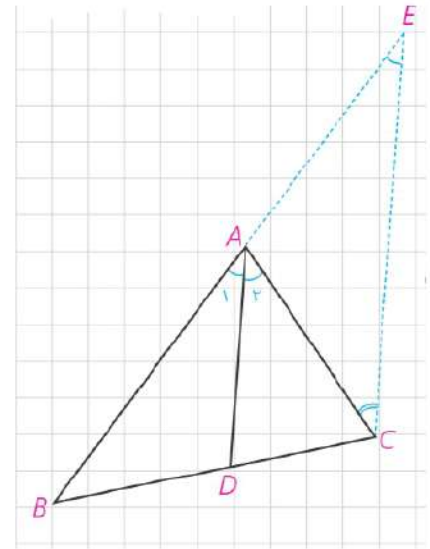
(ب) با توجه به فرض، چه نتیجه ای درباره زوایای E و C می توان گرفت؟ $\hat{E} = \hat{C}$

مثلث AEC چه نوع مثلثی است؟ **متساوی الساقین**

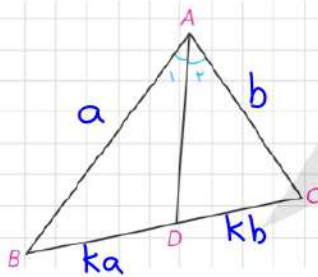
(پ) با توجه به قضیه تالس در مثلث EBC ($AD \parallel EC$) نسبت $\frac{BD}{CD}$ با کدام نسبت برابر است؟ با توجه به نتیجه قسمت (ب) اثبات را کامل کنید:

$$AD \parallel EC \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

یکی از نتایج فوری این قضیه این است که در هر مثلث به سادگی می توان طول های قطعاتی را که هر نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می کند با داشتن طول های اضلاع مثلث، محاسبه کرد:

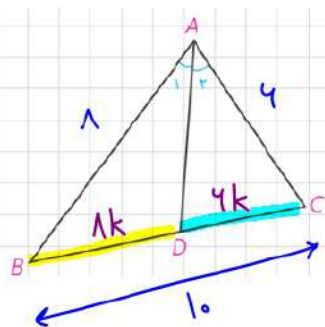


قضیه نیمسازها به زبان ساده



$$\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$$

math-pilevar.ir



برای مثال:

$$1k + 4k = 10 \Rightarrow 14k = 10 \Rightarrow k = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$BD = 1k = 1 \times \frac{5}{7} = \frac{5}{7}$$

$$DC = 4k = 4 \times \frac{5}{7} = \frac{20}{7}$$

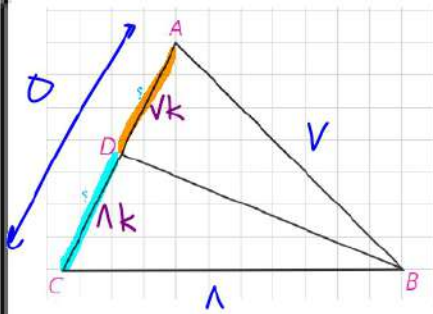
مثال: در مثلث ABC ، $AB=7$ ، $AC=5$ و $BC=8$ است. طول‌های دو قطعه‌ای را به دست آورید که نیمساز زاویه B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

روش اول:

$$7k + 8k = 5 \Rightarrow 15k = 5 \Rightarrow k = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$AD = 7k = 7 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$DC = 8k = 8 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$



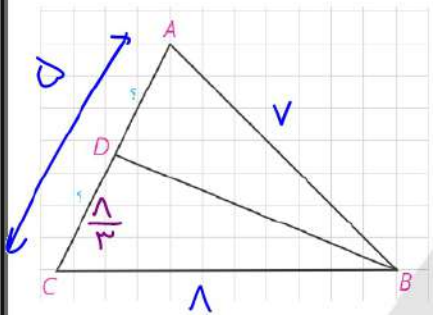
یادآوری: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

روش دوم:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \rightarrow \frac{AB+BC}{BC} = \frac{AD+DC}{DC}$$

$$\frac{7+8}{8} = \frac{5}{DC} \Rightarrow DC = \frac{8 \times 5}{15} = \frac{8}{3}$$

$$AD = \frac{5 \times 7}{15} = \frac{7}{3}$$



کاردرکلاس

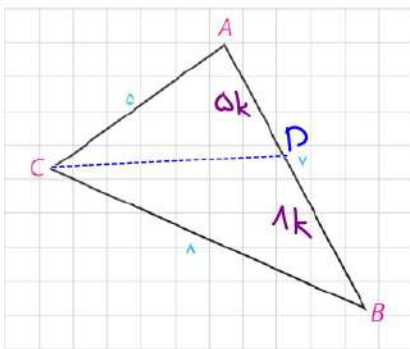
در شکل روبه‌رو نیمساز زاویه C را رسم کنید و طول‌های دو قطعه‌ای را به دست آورید که این نیمساز روی AB جدا می‌کند.

روش اول:

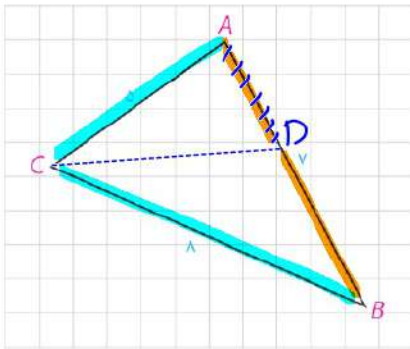
$$5k + 8k = 7 \Rightarrow 13k = 7 \Rightarrow k = \frac{7}{13}$$

$$AD = 5k = 5 \times \frac{7}{13} = \frac{35}{13}$$

$$BD = 8k = 8 \times \frac{7}{13} = \frac{56}{13}$$



روش دوم:

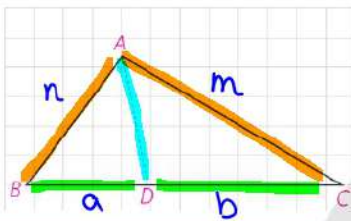


$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DB} \longrightarrow \frac{AC+BC}{BC} = \frac{AD+BD}{BD}$$

$$\frac{1+1}{1} = \frac{V}{BD} \Rightarrow BD = \frac{1 \times V}{13} = \frac{54}{13}$$

$$AD = V - \frac{54}{13} = \frac{91-54}{13} = \frac{37}{13}$$

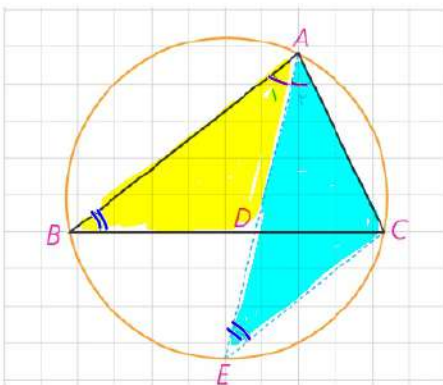
۲- محاسبه طول نیمسازهای زوایای داخلی مثلث



$$AD^2 = nm - ab$$

قضیه ۲: در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

اثبات: AD را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را در نقطه E قطع کند، نقطه E را به C و B وصل می‌کنیم.



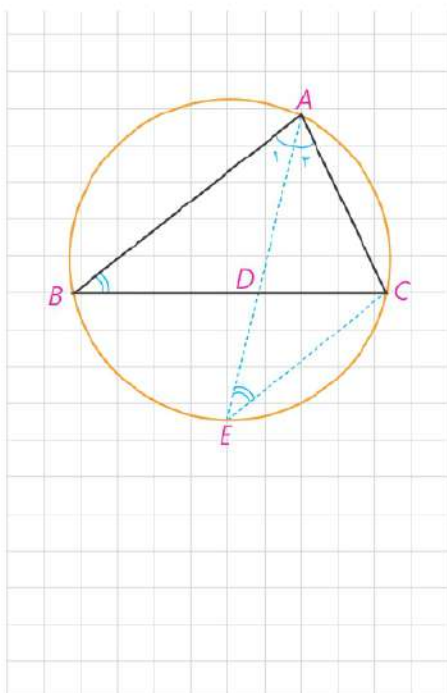
$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{E} = \widehat{AC} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle AEC \rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{EC}$$

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AB \times AC = AE \times AD \quad \xrightarrow{AE = AD + DE}$$

$$AB \times AC = (AD + DE) \times AD \Rightarrow AB \times AC = AD^2 + AD \times DE \quad \xrightarrow{AD \times DE = BD \times DC}$$

$$AB \times AC = AD^2 + BD \times DC \Rightarrow AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$$

در مثلث ABC برای محاسبه طول نیمساز داخلی زاویه $\hat{A}$ ($\hat{A}_1 = \hat{A}_2$)، یعنی AD، امتداد می دهیم تا دایره محیطی مثلث را در E قطع کند و E را به C وصل می کنیم.



الف) چرا $\hat{E} = \hat{B}$ ؟ $\hat{B} = \hat{E} = \frac{\widehat{AC}}{2}$

ب) چرا مثلث های ABD و AEC متشابه اند؟ $\left. \begin{matrix} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{E} = \hat{B} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle AEC$

پ) نسبت های اضلاع متناظر آنها را بنویسید.

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{EC}{BD}$$

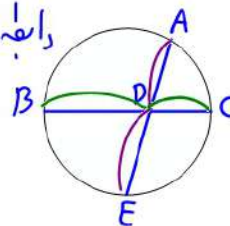
ت) از تناسب اول نتیجه می گیریم:

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE = AD(AD + DE) = AD^2 + AD \cdot DE$$

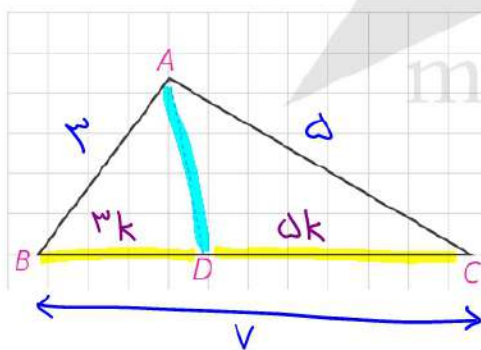
و چون $AD \cdot DE = BD \cdot DC$ (چرا؟) بنابراین:

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

رابطه های طول در دایره



مثال: در مثلث ABC، $AB=3$ ، $AC=5$ و $BC=7$ است. طول نیمساز زاویه A را بیابید.



$$3k + 5k = 7 \Rightarrow 8k = 7 \Rightarrow k = \frac{7}{8}$$

$$BD = 3k = 3 \times \frac{7}{8} = \frac{21}{8}$$

$$DC = 5k = 5 \times \frac{7}{8} = \frac{35}{8}$$

$$AD^2 = 3 \times 5 - \frac{21}{8} \times \frac{35}{8} = \frac{15 \times 4}{1 \times 4} - \frac{735}{64} = \frac{960 - 735}{64} = \frac{225}{64}$$

$$AD = \sqrt{\frac{225}{64}} = \frac{15}{8}$$

حل: به کمک قضیه (۱) طول های BD و CD را به دست می آوریم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BD+CD}{CD} = \frac{8}{5}$$

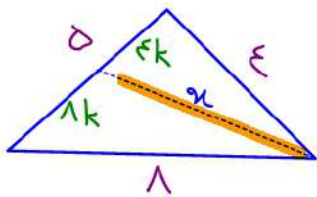
$$\Rightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{7}{CD} = \frac{8}{5} \Rightarrow CD = \frac{35}{8}, BD = 7 - \frac{35}{8} = \frac{21}{8}$$

حال با توجه به قضیه (۲) داریم:

$$AD^2 = AB.AC - BD.CD = 3 \times 5 - \frac{35}{8} \times \frac{21}{8} =$$

$$15 - \frac{735}{64} = \frac{225}{64} \Rightarrow AD = \frac{15}{8}$$

مثال: در مثلثی به طول اضلاع ۴ و ۵ و ۸ طول نیمساز داخلی زاویه متوسط مثلث را بیابید.



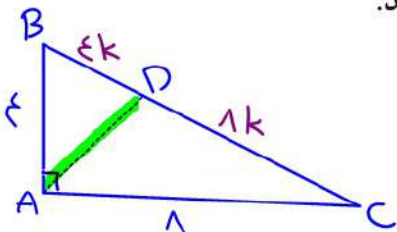
$$4k + 1k = 12k = 5 \Rightarrow k = \frac{5}{12}$$

$$4k = 4 \times \frac{5}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

$$1k = 1 \times \frac{5}{12} = \frac{5}{12}$$

$$x^2 = 4 \times 8 - \frac{5}{3} \times \frac{5}{12} = 32 - \frac{25}{36} = \frac{221}{9} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{221}{9}} = \frac{\sqrt{221}}{3} \approx \frac{14.8}{3} \approx 4.9$$

مثال: در مثلث قائم الزاویه به اضلاع قائمه ۴ و ۸ طول نیمساز زاویه قائمه را بیابید.



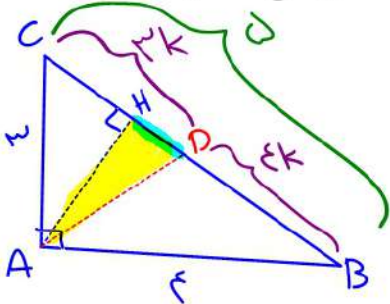
$$BC^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80 \Rightarrow BC = 4\sqrt{5}$$

$$4k + 1k = 4\sqrt{5} \Rightarrow 12k = 4\sqrt{5} \Rightarrow k = \frac{4\sqrt{5}}{12} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$BD = 4k = 4 \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{3}, DC = 1k = 1 \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$AD^2 = 4 \times 8 - \frac{4\sqrt{5}}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{32 \times 9}{1 \times 9} - \frac{20}{9} = \frac{218}{9} \Rightarrow AD = \sqrt{\frac{218}{9}} = \frac{\sqrt{218}}{3} \approx \frac{14.7}{3} \approx 4.9$$

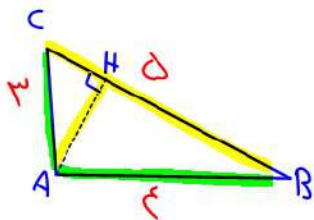
مثال: در مثلث قائم الزاویه ABC زاویه $\hat{A} = 90^\circ$ و اضلاع قائم به طول ۳ و ۴ است. ارتفاع AH و نیمساز AD رسم شده است. اندازه DH را بدست آورید.



$$3k + 4k = 5 \Rightarrow 7k = 5 \Rightarrow k = \frac{5}{7}$$

$$CD = 3k = \frac{15}{7}, \quad DB = 4k = 4 \times \frac{5}{7} = \frac{20}{7}$$

$$AD^2 = 3 \times 4 - \frac{15}{7} \times \frac{20}{7} = \frac{12 \times 49}{7 \times 49} - \frac{300}{49} = \frac{588 - 300}{49} = \frac{288}{49}$$



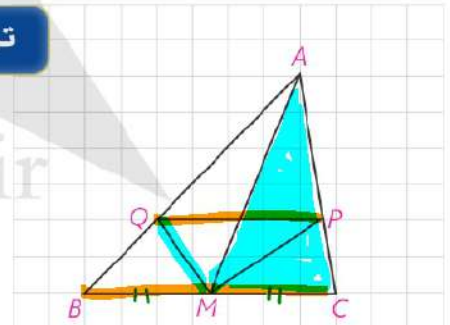
$$AH \times BC = AC \times AB \Rightarrow AH = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\triangle AHD \Rightarrow HD^2 = AD^2 - AH^2 = \frac{288}{49} - \frac{144 \times 49}{25 \times 49} = \frac{144(2 \times 25 - 49)}{49 \times 25} = \frac{144}{49 \times 25} \Rightarrow DH = \frac{12}{5 \times 7} = \frac{12}{35}$$



تمرین

۱- در مثلث ABC ، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند؛ ثابت کنید: $PQ \parallel BC$



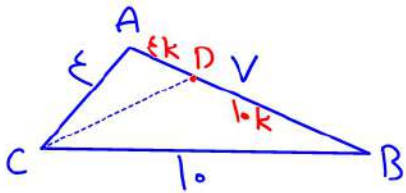
$$BM = MC$$

$$\hat{AMB} \text{ نیمساز } MQ \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AQ}{QB}$$

$$\hat{AMC} \text{ نیمساز } MP \Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{AP}{PC}$$

$$\xrightarrow{BM=MC} \frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QB} \xrightarrow{\text{مکس قضیه ناس}} PQ \parallel BC$$

۲- در مثلث ABC ، $AB=7$ و $AC=4$ و $BC=10$ است. طول نیمساز زاویه داخلی C را به دست آورید.



$$4k + 10k = 7 \Rightarrow 14k = 7 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$AD = 4k = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \quad , \quad DB = 10k = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

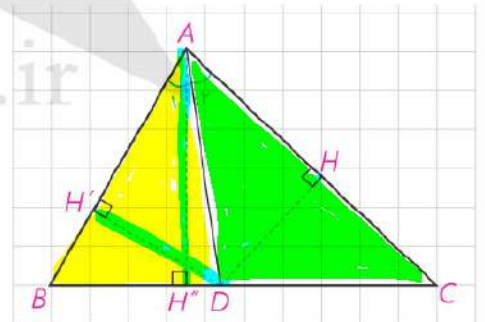
$$CD^2 = 4 \times 10 - 2 \times 5 = 40 - 10 = 30 \Rightarrow CD = \sqrt{30}$$

۳- با پر کردن جاهای خالی با فرض اینکه در شکل مقابل AD نیمساز زاویه $\hat{A}$ است، روش دیگری برای اثبات قضیه نیمسازهای زوایای داخلی ارائه کنید:

الف) چرا $DH = DH'$ ؟

هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه یکپایه فاصله است.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AD \text{ مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADH' \cong \triangle ADH \Rightarrow DH = DH'$$



(ب)

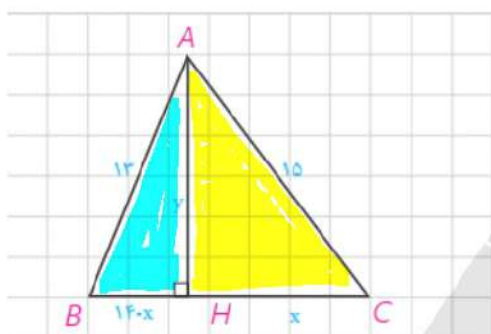
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} DH' \times \cancel{AB}}{\cancel{\frac{1}{2}} DH \times \cancel{AC}} = \frac{AB}{AC} \quad (1)$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} BD \times \cancel{AH''}}{\cancel{\frac{1}{2}} CD \times \cancel{AH''}} = \frac{BD}{CD} \quad (2)$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} \quad \text{از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می شود:}$$

درس چهارم

قضیه هرون (محاسبه ارتفاع ها و مساحت مثلث)



با مسئله زیر در کتاب هندسه ۱ مواجه شدید :

در مثلث ABC با اضلاع ۱۵، ۱۴، ۱۳ ارتفاع AH رسم شده است. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث های AHB و AHC اندازه های x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را نیز محاسبه کنید :

$$\triangle AHC : 15^2 = y^2 + x^2$$

$$\triangle AHB : 13^2 = y^2 + (14-x)^2$$

$$15^2 - 13^2 = x^2 - (14-x)^2$$

$$225 - 169 = x^2 - (196 - 28x + x^2)$$

$$56 = \cancel{x^2} - 196 + 28x - \cancel{x^2} \Rightarrow 28x = 252 \Rightarrow x = \frac{252}{28} = 9$$

$$S = \frac{1}{2} \times 14 \times 12 = 84$$

$$225 = y^2 + 9^2$$

$$y^2 = 225 - 81 = 144$$

$$y = 12$$

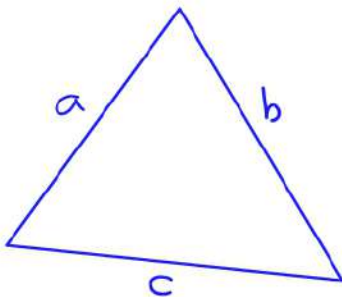
به عنوان یادآوری، مسئله را با هم حل می کنیم:

$$\begin{cases} CH^2 + AH^2 = AC^2 \\ BH^2 + AH^2 = AB^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 15^2 \\ (14-x)^2 + y^2 = 13^2 \end{cases}$$

طرفین این دوتساوی را از هم کم می کنیم که با حذف y^2 معادله ای بر حسب x به دست می آید:

$$x^2 - (14-x)^2 = 56 \Rightarrow x^2 - 196 - x^2 + 28x = 56$$

$$\Rightarrow x = 9, \quad y = 12, \quad S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \times 14 \times 12 = 84$$

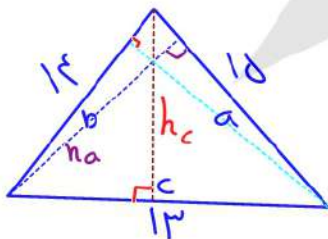


اگر همین روش را در حالت کلی در مثلث ABC ، که $AC=b$ و $AB=c$ ، $BC=a$ به کار ببریم، نتیجه می شود:

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad (\text{دستور هرون})$$

که در این دستور $P = \frac{a+b+c}{2}$ نصف محیط مثلث است.

(اثبات کامل این دستور را می توانید در مجله ریاضی انتهای فصل ببینید.)



مثال: مساحت مثلث با اضلاع به طول های ۱۳، ۱۴ و ۱۵ به کمک دستور هرون

$$P = \frac{15 + 14 + 13}{2} = 21$$

برابر است با:

$$S = \sqrt{21 \times (21-15) \times (21-14) \times (21-13)} = \sqrt{21 \times 6 \times 7 \times 8} = \sqrt{2^4 \times 3^2 \times 7^2} = 84$$

و طول های سه ارتفاع مثلث نیز برابرند با:

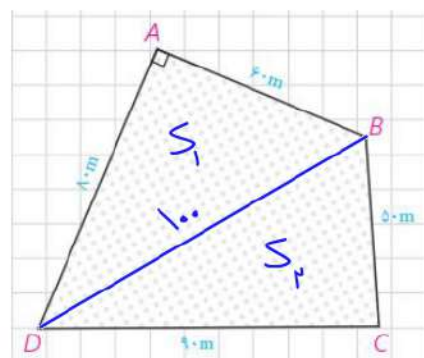
$$S = \frac{1}{2} \times h_c \times c \Rightarrow h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2 \times 84}{13} = 12\frac{8}{13}$$

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \times 84}{15} = 11\frac{2}{5}$$

$$h_b = \frac{2S}{b} = \frac{2 \times 84}{14} = 12$$

کاردر کلاس

چهارضلعی ABCD یک مزرعه کشاورزی را نشان می‌دهد که تنها دو ضلع آن بر هم عمودند. طول‌های اضلاع زمین به سادگی قابل اندازه‌گیری، و اندازه‌های آنها در شکل مشخص شده‌است. با انجام دادن مراحل زیر مساحت این زمین را به دست آورید:



$$S_1 = \frac{1}{1} \times 4\% \times 10 = 4\%$$

$$\Delta ABD: BD^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \Rightarrow BD = \sqrt{17}$$

$$P_r = \frac{100 + 90 + 80}{3} = 90$$

$$S_r = \sqrt{12 \cdot (12 - 1) \cdot (12 - 9) \cdot (12 - 5)}$$

$$= \sqrt{1^2 \times 1^2 \times 1^2 \times 1^2} = \sqrt{1^2 \times 1^2 \times 1^2 \times 1^2} = \sqrt{1^2 \times 1^2 \times 1^2 \times 1^2} = \sqrt{1^2 \times 1^2 \times 1^2 \times 1^2}$$

$$= \sqrt{\psi^\dagger \chi \psi^\dagger \chi \psi^\dagger \chi \psi} = \psi^\dagger \chi \psi \sqrt{\psi^\dagger \chi \psi} = 4.00 \sqrt{1\epsilon}$$

$$U'S = S_1 + S_2 = 18... + 4... \sqrt{18} \approx 84 \text{ cm}$$

الف) اگر B را به D وصل کنیم، طول BD را چگونه به دست می آورید؟

$$BD^r = AB^r + AD^r = 40^r + 60^r = 100 \Rightarrow BD = 100$$

(ب) مساحت مثلث ABD را چگونه به دست می آورید؟

$$S_{ABD} = \frac{100 \times 40}{2} = 2000$$

(ب) مساحت مثلث CBD را به کمک دستور هرون به دست آورید.

$$P = \frac{100 + 20 + 90}{2} = 150, S_{\text{CBD}} = 400 \sqrt{15}$$

(ت) مساحت زمین کشاورزی برابر است با :

$$S = \dots + \dots = \dots$$

فعالیت

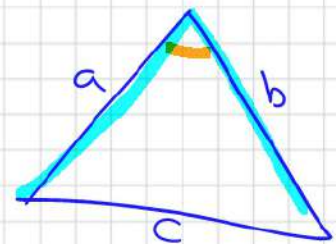
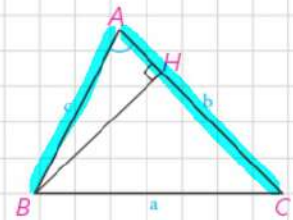
می‌خواهیم دستور دیگری برای محاسبه مساحت مثلث به کمک نسبت‌های مثلثاتی به دست آوریم.

۱- در مثلث ABC، ارتفاع BH را رسم کرده‌ایم.

$$\sin A = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \times \sin A$$

۲- مساحت مثلث ABC را به کمک ارتفاع BH بنویسید.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \times AC = \frac{1}{2} \times AC \times AB \times \sin A$$



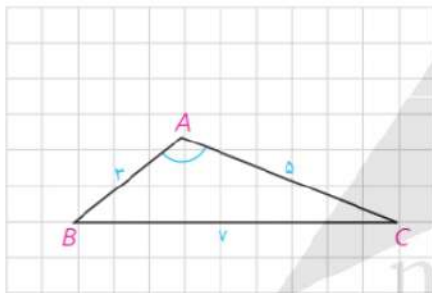
نتیجه

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه‌های هر دو ضلع در سینوس زاویه بین آنها:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B$$

کاردکلاس

۱- مثلث ABC با اضلاع ۳ و ۵ و ۷ مفروض است. مساحت مثلث را با استفاده از دستور هرون به دست آورید.



$$P = \frac{3 + 5 + 7}{2} = \frac{15}{2} \Rightarrow S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \dots$$

$$S = \sqrt{\frac{15}{2} \times \left(\frac{15}{2} - \frac{3}{1 \times 2}\right) \times \left(\frac{15}{2} - \frac{5}{1 \times 2}\right) \times \left(\frac{15}{2} - \frac{7}{1 \times 2}\right)} = \sqrt{\frac{15}{2} \times \frac{9}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3^3 \times 5^2}{2^4}} = \frac{3 \times 5 \sqrt{3}}{2^2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

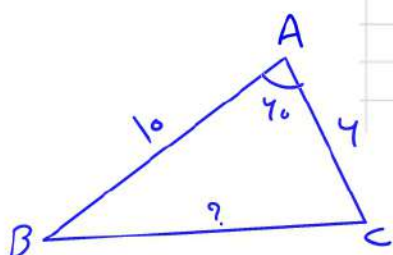
$$\frac{1}{2} \times 3 \times 5 \sin A = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

۲- مساحت مثلث را با استفاده از دستور $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$ بنویسید.

۳- از مقایسه نتایج ۱ و ۲، اندازه زاویه منفرجه $\hat{A}$ را به دست آورید.

$$\sin A = \frac{\frac{15\sqrt{3}}{4}}{\frac{15}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 60^\circ \\ \hat{A} = 120^\circ \end{cases} \checkmark$$

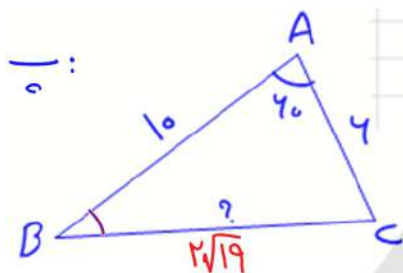
تمرین



۱- در مثلث ABC ، $AB=10$ ، $AC=4$ و $\hat{A}=40^\circ$. الف) طول BC را به دست آورید. ب) مساحت مثلث را تعیین کنید. پ) مقدار $\sin B$ را پیدا کنید.

الف: $BC^2 = 10^2 + 4^2 - 2 \times 10 \times 4 \cos 40^\circ = 100 + 16 - 80 \times \frac{1}{2} = 72 \Rightarrow BC = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

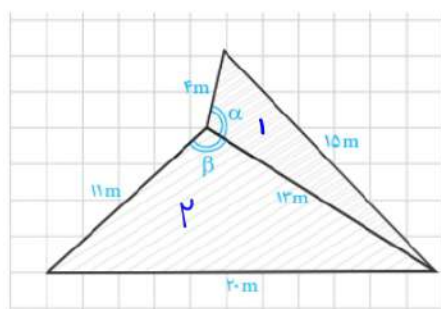
ب: $S = \frac{1}{2} AB \times AC \sin A = \frac{1}{2} \times 10 \times 4 \sin 40^\circ = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$



پ: $S = \frac{1}{2} AB \times BC \sin B \Rightarrow \frac{1}{2} \times 10 \times 6\sqrt{2} \sin B = 10\sqrt{3}$
 $\sin B = \frac{10\sqrt{3}}{30\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$

روش دوم: $\frac{4}{\sin B} = \frac{6\sqrt{2}}{\sin 40^\circ}$

$\sin B = \frac{4 \times \sin 40^\circ}{6\sqrt{2}} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$



۲- دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده‌اند. ابعاد زمین‌ها هم در شکل مشخص شده‌اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چقدر می‌شود؟
 نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه‌های برابر می‌سازد.
 $(\alpha = \beta)$

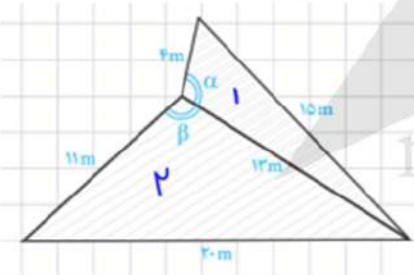
$$P_1 = \frac{4 + 15 + 13}{2} = 14, \quad S_1 = \sqrt{14 \times (14 - 4) \times (14 - 15) \times (14 - 13)}$$

$$= \sqrt{14 \times 10 \times 1 \times 1} = \sqrt{140} = 2\sqrt{35}$$

$$P_2 = \frac{11 + 13 + 20}{2} = 22, \quad S_2 = \sqrt{22 \times (22 - 13) \times (22 - 20) \times (22 - 11)}$$

$$= \sqrt{22 \times 9 \times 2 \times 11} = 11 \times 2 \times 3 = 66$$

$$S_{\text{کل}} = S_1 + S_2 = 2\sqrt{35} + 66 = 90$$



$$15^2 = 4^2 + 13^2 - 2 \times 4 \times 13 \cos \alpha$$

$$225 = 16 + 169 - 104 \cos \alpha$$

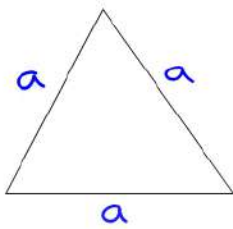
$$104 \cos \alpha = 185 - 225 = -40 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-40}{104} = \frac{-5}{13} \quad (1)$$

$$20^2 = 13^2 + 11^2 - 2 \times 13 \times 11 \cos \beta \Rightarrow 400 = 169 + 121 - 286 \cos \beta$$

$$286 \cos \beta = 290 - 400 = -110$$

$$\cos \beta = \frac{-110}{286} = \frac{-5}{13} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \cos \alpha = \cos \beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

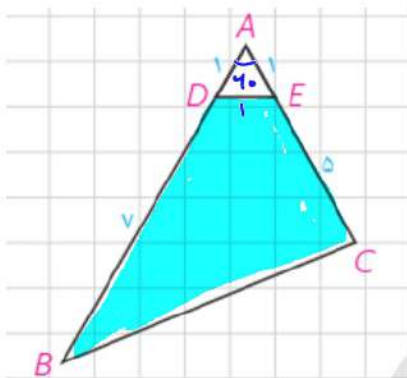


۳- دستور محاسبه مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون به دست آورید.

$$p = \frac{a+a+a}{2} = \frac{3a}{2}$$

$$S = \sqrt{\frac{3a}{2} \left(\frac{3a}{2} - a \right) \left(\frac{3a}{2} - a \right) \left(\frac{3a}{2} - a \right)} = \sqrt{\frac{3a}{2} \left(\frac{3a}{2} - a \right)^3} = \sqrt{\frac{3a}{2} \times \frac{a^3}{1}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$



۴- در شکل مقابل، اولاً طول BC را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی DECB را بیابید.

$$BC^2 = 1^2 + 4^2 - 2 \times 1 \times 4 \cos 40^\circ$$

$$= 17 + 16 - 8 \cos 40^\circ = 33 - 8 \cos 40^\circ \Rightarrow BC = \sqrt{33 - 8 \cos 40^\circ} = 2\sqrt{3}$$

$$S_{DECB} = S_{ABC} - S_{ADE} = \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 4 \sin 40^\circ \right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 \right)$$

$$= \frac{2 \times 4 \times \sqrt{3}}{2 \times 2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

۵- در شکل صفحه بعد AD نیمساز زاویه $\hat{A}$ است.
با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبه طول نیمساز زاویه A به دست آورید.

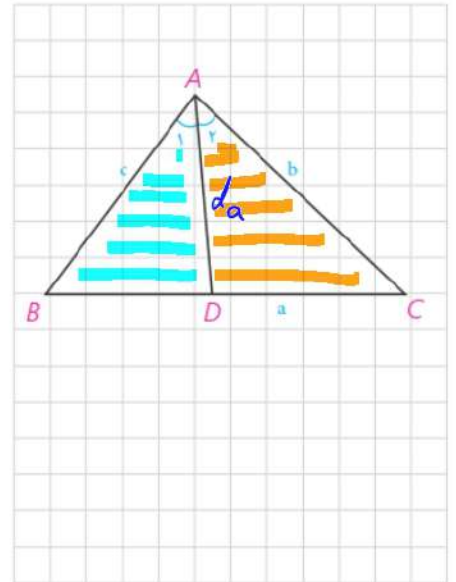
$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} \times b \times c \times \sin A = \cancel{\frac{1}{2}} \times c \times d_a \sin \frac{A}{2} + \cancel{\frac{1}{2}} \times b \times d_a \sin \frac{A}{2}$$

$$bc \sin A = d_a \sin \frac{A}{2} (c + b) \quad \begin{array}{l} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \end{array} \rightarrow$$

$$bc \times 2 \times \cancel{\sin \frac{A}{2}} \times \cos \frac{A}{2} = d_a \sin \frac{A}{2} (c + b)$$

$$d_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{c + b}$$



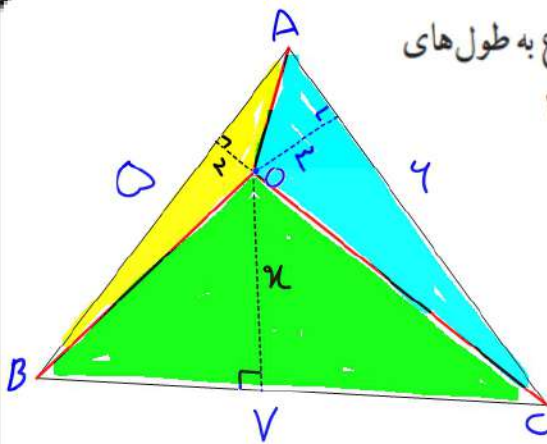
$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} AB \times AD \times \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} AC \times AD \times \sin \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow AB \cdot AC \cdot \sin A = AD \cdot \sin \frac{A}{2} (AB + AC)$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{(AB + AC) \sin \frac{A}{2}} = \frac{2AB \cdot AC \cdot \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{(AB + AC) \sin \frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{2AB \cdot AC \cdot \cos \frac{A}{2}}{AB + AC} \Rightarrow d_a = \frac{2bc \cdot \cos \frac{A}{2}}{b + c} \quad (A \text{ نیمساز رأس } A)$$



۶- در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های

۵ و ۶، به فاصله ۲ و ۳ سانتی متر است از ضلع بزرگ‌تر چه فاصله‌ای دارد؟

راهنمایی: از مساحت مثلث استفاده کنید.

$$P = \frac{4+5+7}{2} = 9$$

$$S_{ABC} = \sqrt{9 \times (9-4)(9-5)(9-7)} = \sqrt{9 \times 5 \times 4 \times 2} = 6\sqrt{10}$$

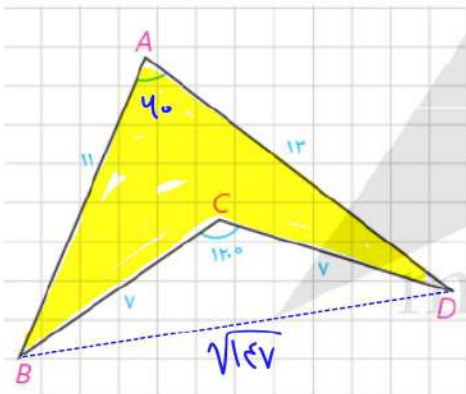
$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC} \Rightarrow \frac{1}{2} \times 5 \times 3 + \frac{1}{2} \times 4 \times 2 + \frac{1}{2} \times 7 \times h = 6\sqrt{10}$$

$$\frac{7h}{2} = 6\sqrt{10} - 14 \Rightarrow 7h = 12\sqrt{10} - 28 \Rightarrow h = \frac{12\sqrt{10} - 28}{7}$$

۷- در شکل، اولاً اندازه زاویه A را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی

ABCD را بیابید.

راهنمایی: B را به D وصل کنید.



$$BD^2 = 11^2 + 13^2 - 2 \times 11 \times 13 \cos 120^\circ = 121 + 169 - 2 \times 11 \times 13 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$BD^2 = 3 \times 49 = 147 \Rightarrow \sqrt{147}$$

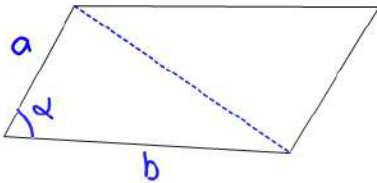
$$\triangle ABD: 147 = 11^2 + 13^2 - 2 \times 11 \times 13 \cos A \Rightarrow 147 = 121 + 169 - 286 \cos A$$

$$286 \cos A = 290 - 147 = 143 \Rightarrow \cos A = \frac{143}{286} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

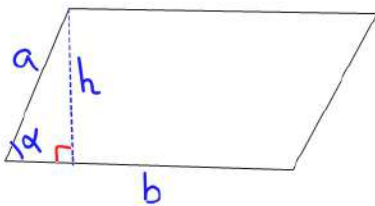
$$S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{BCD} = \frac{1}{2} \times 11 \times 13 \sin 60^\circ - \frac{1}{2} \times 7 \times 7 \sin 120^\circ$$

$$\frac{143}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{49}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{94\sqrt{3}}{4}$$

۸- ثابت کنید مساحت هر متوازی الاضلاع برابر است با حاصل ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین آن دو ضلع.



روش اول: $S = \frac{1}{2} \times (2 \times \frac{1}{2} \times a \times b \sin \alpha) = ab \sin \alpha$



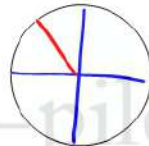
$$S = h \times b = a \times \sin \alpha \times b = ab \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \sin \alpha$$

۹- به کمک قضیه کسینوس ها ثابت کنید در مثلث ABC:

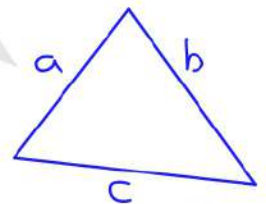
الف) $\hat{A} > 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 > b^2 + c^2$

$$\hat{A} > 90^\circ \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$$



$$\hat{A} > 90^\circ \Rightarrow \cos \hat{A} < 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{-2bc}_{\ominus} \underbrace{\cos \hat{A}}_{\ominus} > 0$$

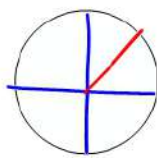


$$a^2 = b^2 + c^2 - \underbrace{2bc \cos A}_{\oplus} \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

$$a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ$$

$$\downarrow$$

$$\cancel{b^2 + c^2} - 2bc \cos A > \cancel{b^2 + c^2} \Rightarrow \underbrace{-2bc}_{\ominus} \underbrace{\cos A}_{\ominus} > 0 \Rightarrow \cos A < 0 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ$$



(ب) $\hat{A} < 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 < b^2 + c^2$

$$\hat{A} < 90^\circ \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$\hat{A} < 90^\circ \Rightarrow \cos A > 0$$

$$-2bc < 0 \Rightarrow \underbrace{-2bc}_{\ominus} \underbrace{\cos A}_{\oplus} < 0$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - \underbrace{2bc \cos A}_{\ominus} \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} < 90^\circ$$

$$a^2 < b^2 + c^2 \xrightarrow{\text{قضیه کسینوس ها}} \cancel{b^2} + \cancel{c^2} - 2bc \cos A < \cancel{b^2} + \cancel{c^2} \Rightarrow \underbrace{-2bc}_{\ominus} \underbrace{\cos A}_{\oplus} < 0$$

$$\cos A > 0 \Rightarrow \hat{A} < 90^\circ$$

(پ) $\hat{A} = 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 = b^2 + c^2$

$$\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$$\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \cos 90^\circ = 0 \Rightarrow -2bc \cos A = 0$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - \underbrace{2bc \cos A}_0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه کسینوس ها}} \cancel{b^2} + \cancel{c^2} - 2bc \cos A = \cancel{b^2} + \cancel{c^2} \Rightarrow \underbrace{-2bc}_{\ominus} \underbrace{\cos A}_{\oplus} = 0 \Rightarrow \cos A = 0 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

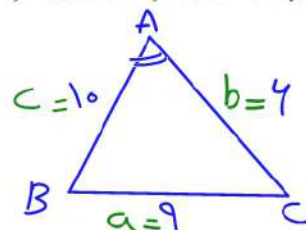
مخالف صفر

۱۰- به کمک نتیجه تمرین ۹، حاده (تند)، قائمه یا منفرجه (باز) بودن زاویه A را در هر

یک از مثلث‌های زیر تعیین کنید:

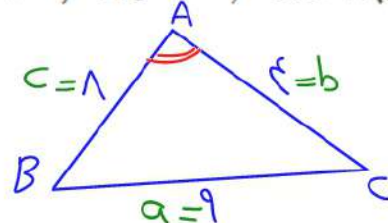
الف) $BC=9$, $AC=6$, $AB=10$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 9^2 = 81 \\ b^2 + c^2 = 6^2 + 10^2 = 136 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} < 90^\circ$$



$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 9^2 = 81 \\ b^2 + c^2 = 6^2 + 10^2 = 136 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ$$

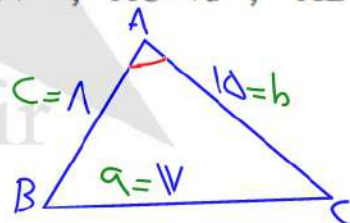
ب) $BC=9$, $AC=4$, $AB=8$



$$a^2 = 17^2 = 289$$

پ) $BC=17$, $AC=15$, $AB=8$

$$b^2 + c^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289$$



$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

