

بناام خدا

جزوه هندسه ۲

(یازدهم ریاضی)

تهیه و تنظیم از :

امیر حسین مطلبی دبیر ریاضی دبیرستان نمونه دولتی استاد شهریار ناحیه ۳ تبریز

* هزینه استفاده از این جزوه صلواتی بر محمد و آل محمد است *

التماس دعا

مثال

هندسه ۲

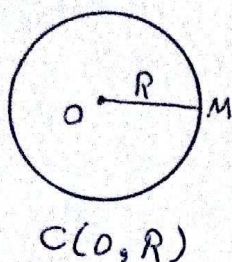
دایره:

دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله آنها از یک نقطه ثابت

به نام مرکز برابر مقدار ثابتی باشد که این مقدار ثابت

را شعاع دایره می نامیم. دایره به مرکز O و شعاع R را

با علامت $C(O, R)$ نشان می دهیم.



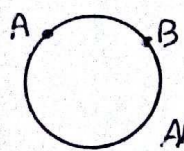
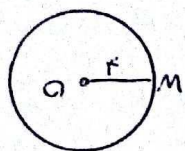
مثال) نقطه ثابت O در صفحه داده شده است. اگر نقاط متحرکی مثل M در

صفحه طوری قرار گیرند که همواره فاصله شان تا O برابر 4 باشد محیط

منحنی را که این نقاط طی می کنند بیابیم.

حل: مکان دایره ای به مرکز O و شعاع $OM = R = 4$ است.

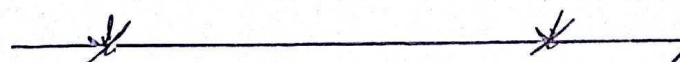
$$\text{محیط دایره} = 2\pi R = 2\pi(4) = 8\pi$$



$\widehat{AB}$ کمان AB

کمانی مستقیم از محیط دایره که بین دو نقطه متناهی قرار داشته

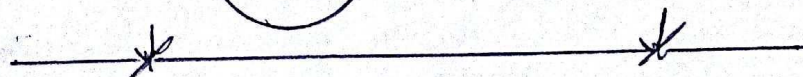
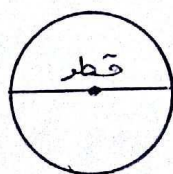
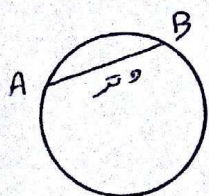
باشد کمان دایره نامیده می شود.



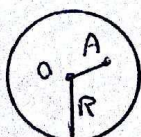
وتره: چاره خطی که دو سر کمان را بهم وصل می کند وتر نامیده می شود.

وتری که از مرکز دایره می گذرد قطر دایره نامیده می شود. نزدیکترین وتر دایره

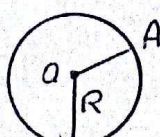
قطر دایره نامیده می شود.



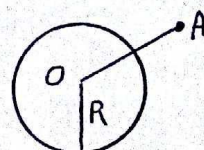
اوضاع نسبی نقطه و دایره:



نقطه داخل دایره است
 $OA < R$

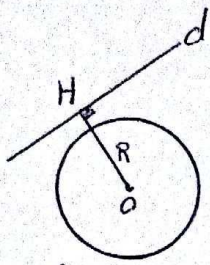


نقطه روی دایره است
 $OA = R$

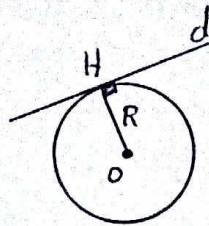


نقطه خارج دایره است
 $OA > R$

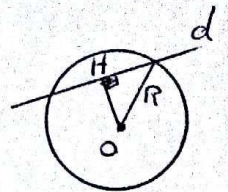
اوضاع نسبی خط و دایره :



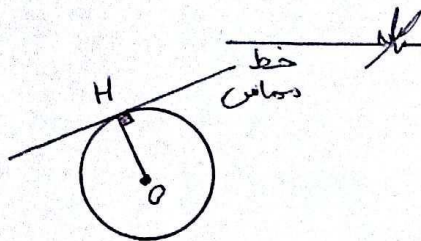
خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند
 $OH > R$



خط و دایره در یک نقطه مشترک اند
 $OH = R$



خط و دایره در دو نقطه مشترک اند
 $OH < R$



خط مماس

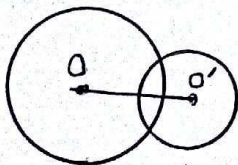
مماس بر دایره :

اگر نقطه‌ای مانند H روی دایره باشد خطی را که از نقطه H می‌گذرد و بر شعاعی از دایره که از H عبور می‌کند، عمود باشد مماس بر دایره در نقطه H می‌گوئیم. شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

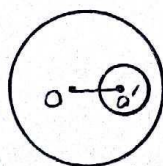


وضعیت دو دایره نسبت به هم :

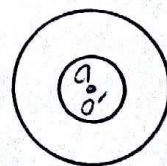
خط المרכזین $d = OO' =$ فاصله مراکز دو دایره



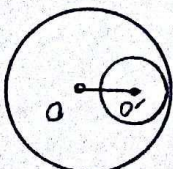
مقاطع
 $r - r' < d < r + r'$



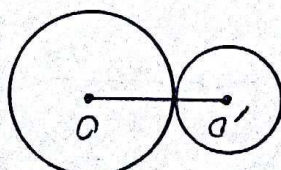
متداخل
 $d < r - r'$



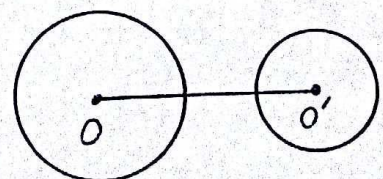
هم مرکز
 $d = 0$



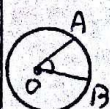
مماس داخل
 $d = r - r'$



مماس بیرون
 $d = r + r'$



متخارج
 $d > r + r'$



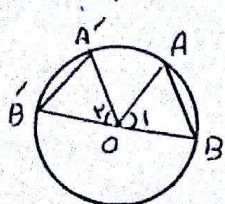
$\hat{AOB} = \hat{AB}$

زاویه مرکزی : زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره و دو ضلع آن شعاع دایره باشد.

۳

هندسه ۲

قضیه: ثابت کنید در یک دایره کمانهای نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند و برعکس.



$AB = A'B'$	فرض
$\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$	حکم

اثبات: دو مثلث $\triangle OAB$ و $\triangle OA'B'$ را شبیه می دهیم:

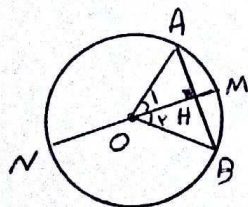
$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \text{ فرض مسئله} \\ OA = OA' = R \\ OB = OB' = R \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض. ض. ض.}} \triangle OAB \cong \triangle OA'B' \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{A'B'}$$

$\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$	فرض
$AB = A'B'$	حکم

عکس قضیه:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AB} = \widehat{A'B'} \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \\ OA = OA' = R \\ OB = OB' = R \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض. ض. ض.}} \triangle OAB \cong \triangle OA'B' \Rightarrow AB = A'B'$$

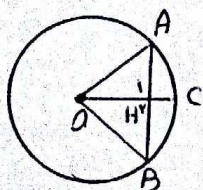
قضیه: ثابت کنید در هر دایره قطر عمود بر وتر، وتر و کمان آنرا نصف می کند.



$MN \perp AB$	فرض
$\widehat{AM} = \widehat{MB}$ و $AH = BH$	حکم

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = R \\ OH = OH \text{ مشترک} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle OAH \cong \triangle OBH \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \\ AH = BH \end{array} \right. \Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{MB}$$

قضیه: ثابت کنید در هر دایره خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از دایره وصل می کند بر آن وتر عمود است.

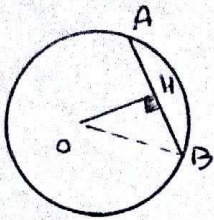


$AH = BH$	فرض
$OC \perp AB$	حکم

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = R \\ OH = OH \text{ مشترک} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض. ض. ض.}} \triangle OAH \cong \triangle OBH \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 \\ \widehat{H}_1 + \widehat{H}_2 = 180^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = 90^\circ \Rightarrow OC \perp AB$$

قضیه: ثابت کنید فاصله وتر به طول L در دایره‌ای به شعاع R تا مرکز دایره برابر است با:

$$OH = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - L^2}$$



اثبات: $OH \perp AB$ و $AB = L$

$$\begin{aligned} OB^2 &= OH^2 + BH^2 \Rightarrow R^2 = OH^2 + \left(\frac{1}{2}L\right)^2 \Rightarrow R^2 = OH^2 + \frac{1}{4}L^2 \\ \Rightarrow OH^2 &= R^2 - \frac{1}{4}L^2 \Rightarrow OH^2 = \frac{4R^2 - L^2}{4} \Rightarrow OH = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - L^2} \end{aligned}$$

نست: فاصله مرکز دایره $C(0, d)$ از وتری به طول L کدام است؟

$$\frac{1}{2} (۴)$$

$$۴ (۳)$$

$$۳ (۲)$$

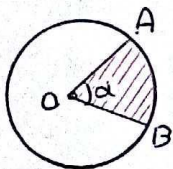
$$۲ (۱)$$

حل: گزینه ب

$$R = d$$

$$L = ۸$$

$$OH = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - L^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4(d)^2 - ۸^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1۰۰ - ۶۴} = \frac{1}{2} \sqrt{۳۶} = \frac{۶}{۲} = ۳$$



قطاع دایره:

خاچه‌ای از درون و روی دایره را که به دو شعاع دایره و یکی دایره محدود است، یک قطاع دایره می‌نامند

قضیه: اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(0, R)$ به حسب درجه مساوی

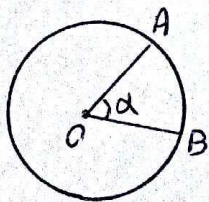
α باشد نشان دهید طول کمان AB برابر است با:

$$L = \frac{\pi R \alpha}{۱۸۰^\circ}$$

و مساحت قطاع برابر است با:

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{۳۶۰^\circ}$$

(α به حسب درجه)



اثبات: در دایره $C(0, R)$ زاویه مرکزی روبرو

به کمان $AB = L$ است. داریم:

$$\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ} = \frac{L}{۲\pi R} \Rightarrow L = \frac{\alpha \cdot ۲\pi R}{۳۶۰^\circ} \Rightarrow L = \frac{\pi R \alpha}{۱۸۰^\circ}$$

$$\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ} = \frac{S_{قطاع}}{\pi R^2} \Rightarrow S_{قطاع} = \frac{\pi R^2 \alpha}{۳۶۰^\circ}$$

ص ۵

هندسه ۲

مثال ۱: طول کمان روبه رو به زاویه 30° در دایره ای به شعاع 3 cm را حساب کنید.

$$R = 3\text{ cm} \div 100 = \frac{3}{100}\text{ m}$$

$$l = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ} = \frac{\pi \times \frac{3}{100} \times 30^\circ}{180^\circ} = \frac{3\pi}{400} \Rightarrow l = \frac{\pi}{200}\text{ m}$$

مثال ۲: اگر طول کمان روبه رو به زاویه 24° در دایره $C(O, R)$ برابر 4π باشد محیط و مساحت دایره را بیابید.

$$\alpha = 24^\circ$$

$$l = 4\pi$$

$$l = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ} \Rightarrow 4\pi = \frac{\pi R \times 24^\circ}{180^\circ} \Rightarrow 4R = 12 \Rightarrow R = 3$$

$$\text{محیط} = P = 2\pi R = 2\pi \times 3 = 4\pi$$

$$\text{مساحت} = S = \pi R^2 = \pi \times 3^2 = 9\pi$$

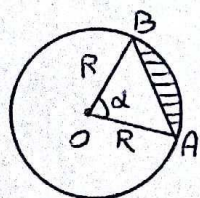
مثال ۳: قطاعی بازو به 4° در دایره $C(O, R)$ در نظری بگیریم. اگر مساحت این قطاع $\frac{50\pi}{3}$ باشد شعاع دایره را بیابید.

$$S = \frac{50\pi}{3}$$

$$\alpha = 4^\circ$$

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} \Rightarrow \frac{50\pi}{3} = \frac{\pi R^2 \times 4^\circ}{360^\circ} \Rightarrow R^2 = 100 \Rightarrow R = 10$$

مثال ۴: مطابق شکل در دایره $C(O, R)$ دو قطاع بازو به بین α بر حسب درجه نسبت به هم رسم شده اند. هندسه رئی را که محدود به وتر AB و دایره است، قطعه ای از دایره می نامیم. مساحت این قطعه را بر حسب α و R بیابید.



$$S_{\text{قطعه}} = S_{\text{قطاع } OAB} - S_{\triangle OAB}$$

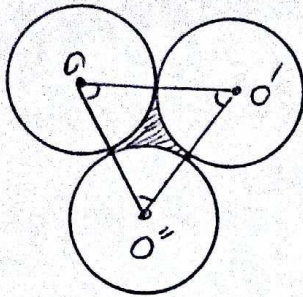
$$\Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{1}{2} (OA \times OB \times \sin \alpha)$$

$$\Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha \Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{\pi \alpha}{180^\circ} - \sin \alpha \right)$$

اگر زاویه مرکزی قطاع بر حسب رادیان باشد مساحت قطعه از فرمول زیر بدست می آید:

$$S = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin \alpha) \quad (\alpha \text{ بر حسب رادیان})$$

مثال ۵: شعاع هر سه دایره برابر R است. مساحت مستطین هاشورخوره را حساب کنید:

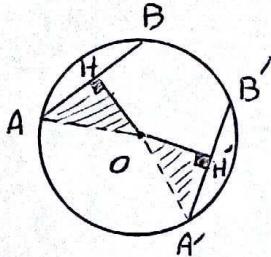


$$OO' = OO'' = O'O'' = 2R$$

$$\triangle OO'O'' \text{ متساوی الاضلاع} \Rightarrow S_{\triangle OO'O''} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(2R)^2 \sqrt{3}}{4} = R^2 \sqrt{3}$$

$$S_{\text{رئی}} = S_{\triangle OO'O''} - \underbrace{S_{\text{۳ قطاع}}}_{\text{منفی دایره}} = R^2 \sqrt{3} - \frac{1}{4} \pi R^2 = R^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{4} \right)$$

قضیه: ثابت کنید اگر دو دایره دو وتر مساوی باشند آنگاه فاصله آنها تا مرکز دایره مساوی است و برعکس.



$AB = A'B'$	فرض
$OH = OH'$	حکم

اثبات: O را به A و A' وصل می کنیم؛ می دانیم

قطر یا شعاع عمود بر وتر، وتر را نصف می کند:

$$AB = A'B' \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{A'B'}{2} \Rightarrow AH = A'H'$$

$$\left. \begin{array}{l} OA = OA' = R \text{ (وتر و یک)} \\ AH = A'H' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{مربع}} \triangle OAH \cong \triangle OA'H' \Rightarrow OH = OH'$$

$OH = OH'$	فرض
$AB = A'B'$	حکم

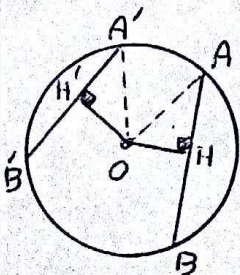
عکس قضیه:

$$\left. \begin{array}{l} OA = OA' = R \\ OH = OH' \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{مربع}]{\text{وتر و یک}} \triangle OAH \cong \triangle OA'H' \Rightarrow AH = A'H' \Rightarrow 2AH = 2A'H' \Rightarrow AB = A'B'$$

قضیه: در دایره از دو وتر نابرابر آنکه بزرگتر است به مرکز دایره نزدیکتر است و برعکس:

$AB > A'B'$	فرض
$OH < OH'$	حکم

اثبات: می دانیم شعاع عمود بر وتر، وتر را نصف می کند.



$$AH = \frac{AB}{2} \text{ و } A'H' = \frac{A'B'}{2}, \quad AB > A'B' \Rightarrow AH > A'H'$$

✓

هندسه ۲

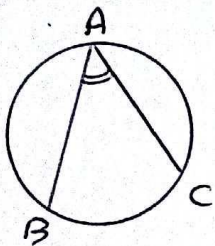
$$\begin{cases} \triangle OAH: OA^2 = OH^2 + AH^2 \\ \triangle OA'H': OA'^2 = OH'^2 + A'H'^2 \end{cases} \xrightarrow{OA=OA'=R} OH^2 + AH^2 = OH'^2 + A'H'^2 \Rightarrow AH^2 - A'H'^2 = OH'^2 - OH^2$$

$$\Rightarrow AH > A'H' \Rightarrow OH'^2 - OH^2 > 0 \Rightarrow OH' > OH \Rightarrow OH < OH'$$

$OH < OH'$	منف	عکس قضیه:
$AB > A'B'$	هم	

$$\left. \begin{aligned} OH' > OH &\Rightarrow OH'^2 > OH^2 \Rightarrow OH'^2 - OH^2 > 0 \\ \text{از طرفی } AH^2 - A'H'^2 &= OH'^2 - OH^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow AH^2 - A'H'^2 > 0 \Rightarrow AH^2 > A'H'^2 \Rightarrow AH > A'H'$$

$$\Rightarrow 2AH > 2A'H' \Rightarrow AB > A'B'$$

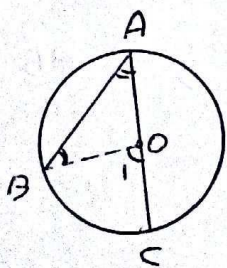


زاویه محاطی: زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و اضلاعش دو وتر از دایره باشند زاویه محاطی نامیده می‌شود.

قضیه: ثابت کنید اندازه هر زاویه محاطی برابر نصف کمان روبه روست

سه حالت در نظر می‌گیریم:

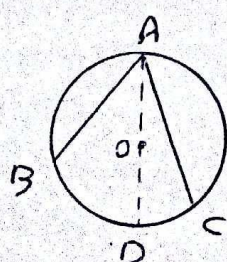
حالت اول: یک ضلع زاویه، قطر دایره باشد.	منف	هم
$\hat{A} = \widehat{BC}$		



$$OA = OB = R \Rightarrow \widehat{OAB} \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$$

$$\hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{B} \xrightarrow{\hat{A} = \hat{B}} \hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{A} \Rightarrow \hat{O}_1 = 2\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\hat{O}_1}{2}$$

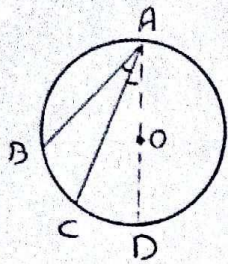
$$\Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$



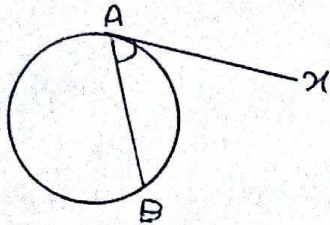
حالت دوم: دو ضلع زاویه در دو طرف مرکز دایره باشند.

قطر AD را رسم می‌کنیم طبق حالت اول داریم:

$$\begin{cases} \hat{BAD} = \frac{\widehat{BD}}{2} \\ \hat{DAC} = \frac{\widehat{DC}}{2} \end{cases} \Rightarrow \hat{BAD} + \hat{DAC} = \frac{\widehat{BD}}{2} + \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow \hat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

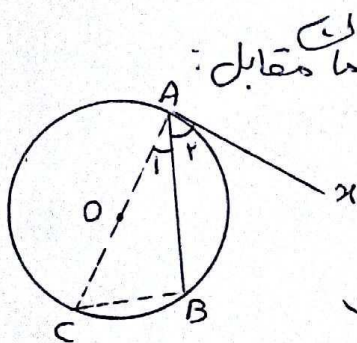


$$\widehat{BAC} = \widehat{BAD} - \widehat{CAD} = \frac{\widehat{BD}}{2} - \frac{\widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$



زاویه ظلی:

زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و یک ضلع آن وتر از دایره و ضلع دیگرش مماس بر دایره باشد زاویه ظلی نامیده می‌شود.



قضیه: اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف کمان مقابل:

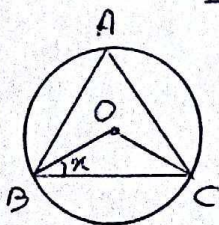
فرض	$\hat{A}_r = \frac{\widehat{AB}}{2}$
کام	$\hat{A}_r = \frac{\widehat{AB}}{2}$

اثبات: قطر AC را رسم می‌کنیم. $\hat{B}$ محاطی و روبروی

قطر AC است پس: $\hat{B} = 90^\circ$ از طرفی می‌دانیم شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است پس:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_r = 90^\circ$$

$$\hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 + \hat{C} = 90^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{A}_r = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_r = \hat{A}_1 + \hat{C} \Rightarrow \hat{A}_r = \hat{C} \Rightarrow \hat{A}_r = \frac{\widehat{AB}}{2}$$



تقدیر: ثابت کنید در شکل مقابل: $\hat{x} = 90^\circ - \hat{A}$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O} = \widehat{BC} \\ \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\hat{O}}{2} \Rightarrow \hat{O} = 2\hat{A}$$

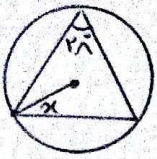
$$\widehat{OBC} : OB = OC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \hat{x}$$

$$\widehat{OBC} : \hat{B} + \hat{C} + \hat{O} = 180^\circ \Rightarrow \hat{x} + \hat{x} + 2\hat{A} = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{x} + 2\hat{A} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2\hat{x} = 180^\circ - 2\hat{A} \Rightarrow \hat{x} = \frac{180^\circ - 2\hat{A}}{2} \Rightarrow \hat{x} = 90^\circ - \hat{A}$$

ص ۹

هندسه ۲

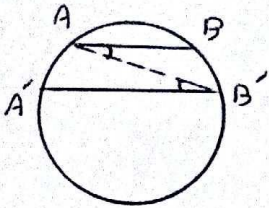


سؤال: مقدار $\hat{A}$ کدام است؟

۱) ۵۴° ۲) ۲۸° ۳) ۴۲° ۴) ۴۲°

$$\hat{A} = 90^\circ - \hat{A} = 90^\circ - 28^\circ = 42^\circ$$

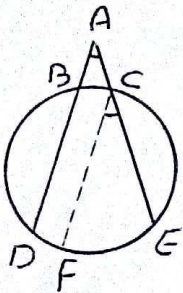
قضیه ثابت کنید در دایره، گمانه‌های محصور بین دو وتر موازی، یکدیگر برابرند و برعکس.



$$\begin{array}{c|c} AB \parallel A'B' & \text{منفصل} \\ \hline \widehat{AA'} = \widehat{BB'} & \text{هم} \end{array}$$

اثبات: A را به B وصل می‌کنیم:

$$(AB \parallel A'B' \text{ و } AB' \text{ وتر}) \Rightarrow \hat{A} = \hat{B'} \Rightarrow \frac{\widehat{BB'}}{2} = \frac{\widehat{AA'}}{2} \Rightarrow \widehat{BB'} = \widehat{AA'}$$



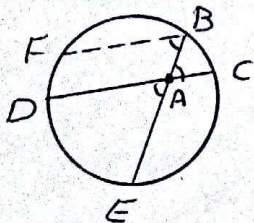
$$\hat{A} = \frac{\widehat{DE} - \widehat{BC}}{2} \quad \text{قضیه ثابت کنید:}$$

اثبات: از نقطه C، خط CF را موازی BD رسم می‌کنیم:

$$BD \parallel CF \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{FE}$$

$$AD \parallel CF \text{ و } AE \text{ وتر} \Rightarrow \hat{A} = \hat{C} = \frac{1}{2} \widehat{EF}$$

$$\hat{A} = \frac{1}{2} \widehat{EF} \Rightarrow \hat{A} = \frac{1}{2} (\widehat{DE} - \widehat{DF}) \xrightarrow{\widehat{BC} = \widehat{FE}} \hat{A} = \frac{\widehat{DE} - \widehat{BC}}{2}$$



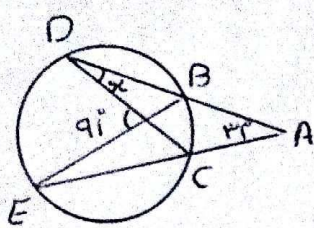
$$\hat{A} = \frac{\widehat{DE} + \widehat{BC}}{2} \quad \text{قضیه ثابت کنید:}$$

اثبات: از نقطه B، خط BF را موازی CD رسم می‌کنیم.

$$CD \parallel BF \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{FD}$$

$$BF \parallel CD \text{ , } BE \text{ وتر} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \frac{1}{2} \widehat{EF}$$

$$\hat{A} = \frac{1}{2} (\widehat{FD} + \widehat{ED}) \xrightarrow{\widehat{BC} = \widehat{FD}} \hat{A} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{DE}}{2}$$



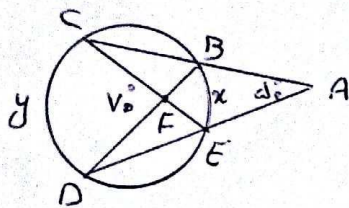
تمرین ۱: در شکل مقابل اندازه $\hat{x}$ را بیابید.

$$31^\circ = \frac{\widehat{DE} - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{DE} - \widehat{BC} = 62^\circ$$

$$91^\circ = \frac{\widehat{DE} + \widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{DE} + \widehat{BC} = 182^\circ$$

$$2\widehat{DE} = 140^\circ \Rightarrow \widehat{DE} = 70^\circ$$

$$31^\circ = \frac{182^\circ - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow 62^\circ = 182^\circ - \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{BC} = 120^\circ \Rightarrow \hat{x} = \frac{40^\circ}{2} \Rightarrow \hat{x} = 20^\circ$$

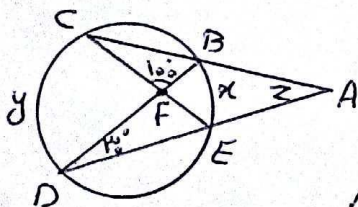


تمرین ۲: در شکل مقابل مقادیر x و y را بیابید.

$$70^\circ = \frac{x + y}{2} \Rightarrow x + y = 140^\circ$$

$$10^\circ = \frac{y - x}{2} \Rightarrow y - x = 20^\circ$$

$$\begin{cases} y + x = 140^\circ \\ y - x = 20^\circ \end{cases} \Rightarrow 2y = 160^\circ \Rightarrow y = 80^\circ \text{ و } x = 60^\circ$$



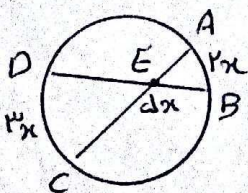
تمرین ۳: در شکل روبه رو مقادیر x و y و z را بیابید.

$$\widehat{D} = \frac{\widehat{BE}}{2} \Rightarrow 30^\circ = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 60^\circ$$

$$\widehat{CFD} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

$$80^\circ = \frac{y + x}{2} \Rightarrow 160^\circ = y + 60^\circ \Rightarrow y = 100^\circ$$

$$z = \frac{y - x}{2} \Rightarrow z = \frac{100^\circ - 60^\circ}{2} \Rightarrow z = 20^\circ$$



تمرین ۴: در شکل روبه رو مقدار x را بیابید.

$$\widehat{DEC} = 180^\circ - \Delta x$$

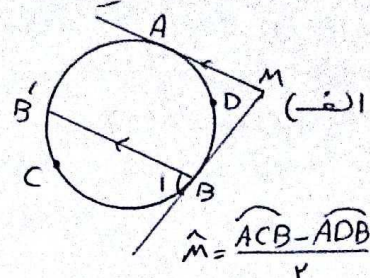
$$110^\circ - \Delta x = \frac{2x + 3x}{2} \Rightarrow 340^\circ - 10x = \Delta x \Rightarrow 340^\circ = 11\Delta x$$

$$\Rightarrow x = \frac{340^\circ}{11} \Rightarrow x = 30^\circ$$

« حل تقدیمات ص ۱۴ کتاب »

۱) در شکل‌های زیر ثابت کنید: (راحتی: از نقطه B خط موازی ضلع دیگر زاویه کشید)

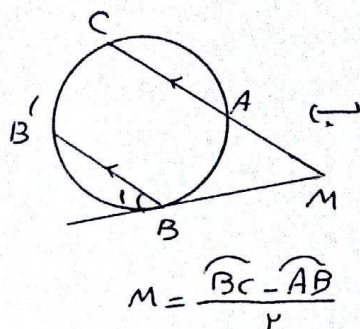
از B خطی به موازات AM رسم می‌کنیم



$$(BB' \parallel AM, \text{ مورب } AB) \Rightarrow \hat{M} = \hat{B}_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{B}_1 = \frac{\widehat{BB'}}{2} \\ \hat{M} = \frac{\widehat{BB'}}{2} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AB'}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AB'}}{2}$$

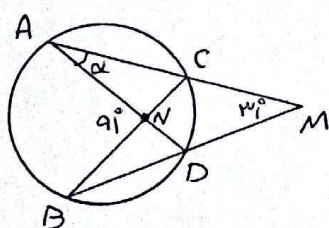
$$\widehat{AB'} = \widehat{ADB} \Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2}$$

از B خطی به موازات MC رسم می‌کنیم:



$$(BB' \parallel AM, \text{ مورب } MB) \Rightarrow \hat{M} = \hat{B}_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{B}_1 = \frac{\widehat{BB'}}{2} \\ \hat{M} = \frac{\widehat{BB'}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{BB'}}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{B'C}}{2} \quad \widehat{B'C} = \widehat{AB} \Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$$



۲) در شکل مقابل اندازه زاویه α را بدست آورید.

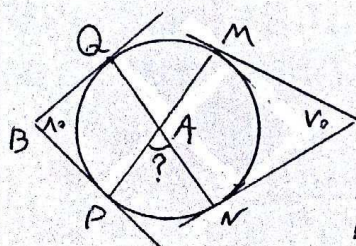
$$\hat{M} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow 34^\circ = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} - \widehat{CD} = 68^\circ$$

$$\hat{N} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} \Rightarrow 91^\circ = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{CD} = 182^\circ$$

$$\begin{cases} \widehat{AB} - \widehat{CD} = 68^\circ \\ \widehat{AB} + \widehat{CD} = 182^\circ \end{cases} +$$

$$2\widehat{AB} = 250^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 125^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 57^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{57^\circ}{2} = 28.5^\circ$$

۳) در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس اند. اندازه زاویه $\hat{A}$ چند درجه است؟

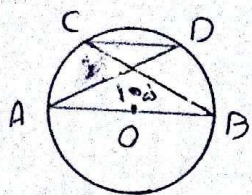


$$V_0^\circ = \frac{(34^\circ - \widehat{MN}) - \widehat{MN}}{2} \Rightarrow 14^\circ = 34^\circ - 2\widehat{MN} \Rightarrow \widehat{MN} = 10^\circ$$

$$A_0^\circ = \frac{(34^\circ - \widehat{PQ}) - \widehat{PQ}}{2} \Rightarrow 14^\circ = 34^\circ - 2\widehat{PQ} \Rightarrow \widehat{PQ} = 10^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{MQ} + \widehat{PN}}{2} = \frac{34^\circ - (\widehat{MN} + \widehat{PQ})}{2} = \frac{34^\circ - (10^\circ + 10^\circ)}{2} = \frac{14^\circ}{2} = 7^\circ$$

۴) در دایره رسم شده شکل مقابل $CD \parallel AB$ اندازه کمان CD را بدست آورید.



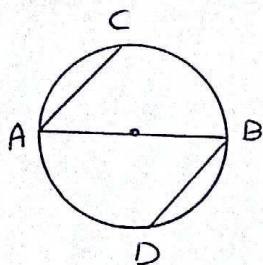
$$CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \quad (1)$$

$$\widehat{AD} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} \Rightarrow 150^\circ = \widehat{AC} + \widehat{BD} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 150^\circ = 2\widehat{AC} \Rightarrow \widehat{AC} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = 75^\circ$$

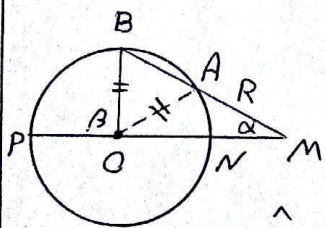
$$\widehat{CD} = 180^\circ - (\widehat{AC} + \widehat{BD}) = 180^\circ - (75^\circ + 75^\circ) = 30^\circ$$

۵) در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی اند.
ثابت کنید: $AC = BD$



$$AC \parallel BD \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC} \Rightarrow 180^\circ - \widehat{BD} = 180^\circ - \widehat{AC} \\ \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{AC}$$

۶) دایره $C(O, R)$ مفروض است. از نقطه M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌اند که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و $MA = R$ باشد. $\angle B = 3\alpha$ دهید.

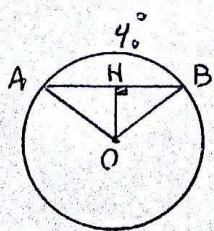


$$OA = MA = R \Rightarrow \triangle OAM \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{M} = \alpha$$

$$\widehat{AOM} = \widehat{AN} = \alpha \text{ مرکزی}$$

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{BP} - \widehat{AN}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\widehat{BP} - \alpha}{2} \Rightarrow 3\alpha = \widehat{BP} \left. \begin{array}{l} \widehat{BP} = \beta \text{ از طرف} \end{array} \right\} \Rightarrow \beta = 3\alpha$$

۷) در دایره $C(O, R)$ ، $\widehat{AB} = 4^\circ$ و $AB = 10$ ، فاصله O از وتر AB را بدست آورید.

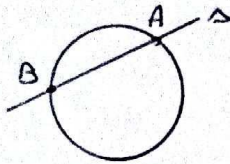


$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AOB} = 4^\circ \text{ مرکزی} \\ OA = OB = R \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAB \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow OB = 10, \widehat{B} = 4^\circ$$

$$\triangle OHB: \sin \widehat{B} = \frac{OH}{OB} \Rightarrow \sin 4^\circ = \frac{OH}{10} \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 \Rightarrow OH = 5\sqrt{3}$$

روابط طولی در دایره:

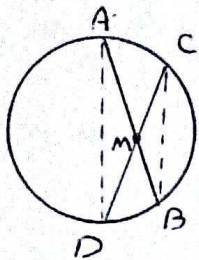
قاطع بردایره: خط راستی که دایره را در دو نقطه قطع کند قاطع بردایره یا به طور خلاصه قاطع نامیده می شود.



قضیه: هرگاه خطهای شامل دو وتر داخلخواه AB و CD در نقطه ای مانند M درون دایره یکدیگر را قطع کنند آنگاه:

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

اثبات: C را به B وصل می کنیم داریم:

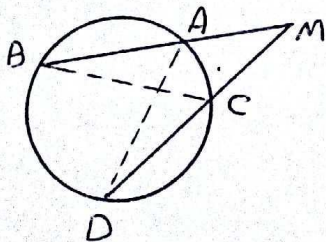


$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{C} = \widehat{BD} \\ \hat{B} = \hat{D} = \widehat{AC} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{حالت} \\ \text{زاویه} \end{array} \Rightarrow \triangle ADM \sim \triangle CMB \Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MC} = \frac{AD}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MC} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

قضیه: هرگاه خطهای شامل دو وتر داخلخواه AB و CD در نقطه ای مانند M بیرون دایره یکدیگر را قطع کنند آنگاه:

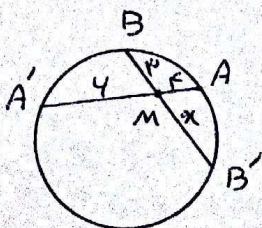
$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$



$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{D} = \widehat{AC} \\ \hat{M} = \hat{M} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{حالت} \\ \text{زاویه} \end{array} \Rightarrow \triangle MBC \sim \triangle MAD \Rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{MC}{MA} = \frac{MB}{MD}$$

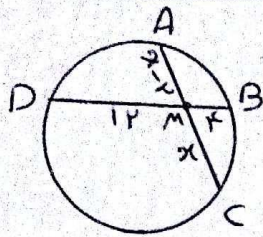
$$\Rightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{MB}{MD} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

تمرین: در شکل مقابل طول وتر BB' را بیابید.



$$MA \cdot MA' = MB \cdot MB' \Rightarrow 3 \times 4 = 3 \times x \Rightarrow x = 4$$

$$BB' = 3 + x = 3 + 4 = 7$$

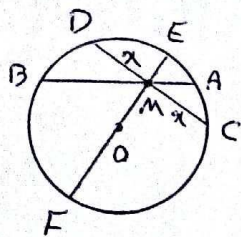


تقرین: در شکل روی مقدار x رابیه بید.

$$MA \cdot MC = MB \cdot MD \Rightarrow x(x-2) = 4 \times 12 \Rightarrow x^2 - 2x = 48$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 48 = 0 \Rightarrow (x-8)(x+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=8 & \text{وق} \\ x=-6 & \text{غوق} \end{cases}$$

تقرین: نقطه M روی وتر AB به طول ۹ واحد از دایره (C) چنانکه قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. طول کوتاهترین وتر گذرنده از M رابیه بید.

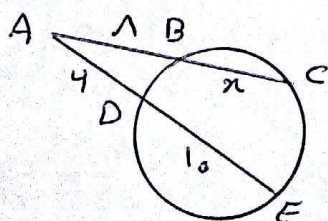


حل: مطابق شکل ابتدا وتر AB را در دایره C رسم می کنیم
برای رسم کوتاهترین وتر گذرنده از M ابتدا M را به
 O مرکز دایره وصل کرده از دو طرف امتدای دهیم تا قطر
 EF رسم شود پس از M بر EF عمودی کنیم تا وتر DC رسم شود
می دانیم قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می کند پس:
 $DM = DC = x$

$$AB = 9 \Rightarrow MA = 3 \text{ و } MB = 4 \text{ (نسبت ۱ به ۲)}$$

$$MD \cdot MC = MA \cdot MB \Rightarrow x \cdot x = 3 \times 4 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12} \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$$

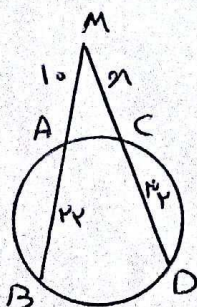
$$DC = 2x = 4\sqrt{3}$$



تقرین: در شکل های زیر مقادیر x را تعیین کنید:

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE \Rightarrow 1(1+x) = 4(4+10)$$

$$\Rightarrow 4x + 1 = 44 \Rightarrow 4x = 43 \Rightarrow x = \frac{43}{4}$$



$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

$$10(10+22) = x(x+32) \Rightarrow 320 = x^2 + 32x$$

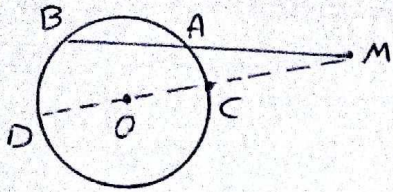
$$\Rightarrow x^2 + 32x - 320 = 0 \Rightarrow (x+40)(x-8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -40 & \text{غوق} \\ x = 8 & \text{وق} \end{cases}$$

مسئله ۱۵

هندسه ۲

تقریباً مطابق شکل $AB=3$ و $MA=5$ است. اگر محیط دایره برابر 1π باشد فاصله M از مرکز دایره را بیابید.

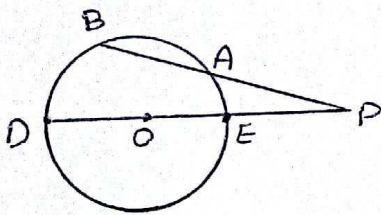


حل: M را به نقطه O مرکز دایره وصل کرده و امتداد می دهیم:

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD \Rightarrow MA \cdot MB = (MO - \overline{OC})(MO + \overline{OD})$$

$$\Rightarrow MA \cdot MB = MO^2 - R^2 \Rightarrow 5(5+3) = MO^2 - 4^2 \Rightarrow MO^2 = 49 \Rightarrow MO = 7$$

تقریباً: نقطه P خارج دایره (O, R) است. اگر فاصله این نقطه تا مرکز دایره برابر d باشد، ثابت کنید حاصلضرب طول قطعات هر قاطعی که از P بر دایره رسم می شود مقدار ثابت $d^2 - R^2$ است که این مقدار ثابت را قوت نقطه P نسبت به دایره (C) می گوئیم.

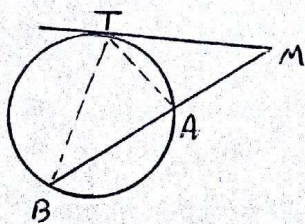


$PO = d$	فرض
$PA \cdot PB = d^2 - R^2$	حکم

حل: نقطه P را به مرکز دایره وصل کرده و امتداد می دهیم:

$$PA \cdot PB = PE \cdot PD \Rightarrow PA \cdot PB = (\underbrace{PO}_{d} - \underbrace{OE}_{R})(\underbrace{PO}_{d} + \underbrace{OD}_{R}) \Rightarrow PA \cdot PB = d^2 - R^2$$

قضیه: اگر از یک نقطه خارج دایره، یک مماس و یک قاطع نسبت به آن دایره رسم کنیم، مربع طول مماس برابر است با حاصلضرب دو قطعه قاطع.



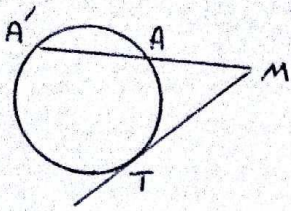
$MT^2 = MA \cdot MB$	فرض
	حکم

اثبات:

T را به A و B وصل می کنیم داریم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{MTA} &= \frac{\widehat{AT}}{2} \\ \hat{MBT} &= \frac{\widehat{AT}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{MTA} = \hat{MBT}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{MTA} &= \hat{MBT} \\ \hat{M} &= \hat{M} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle MTB \sim \triangle MTA \Rightarrow \frac{MA}{MT} = \frac{AT}{BT} = \frac{MT}{MB} \Rightarrow MT^2 = MA \cdot MB$$

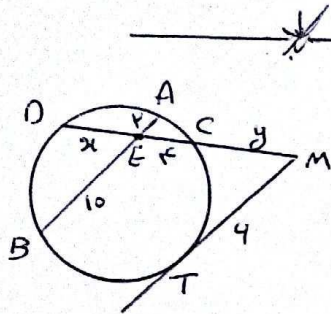


تقریباً: در شکل روبه‌رو از نقطه M بر دایره مماس و
 قاطعی رسم شده است:
 الف) اگر $MA = 4$ و $AA' = 5$ باشد طول MT را بیابید.
 ب) اگر $MA' = 18$ و $MT = 12$ باشد طول وتر AA' را بیابید.

الف) $MT^2 = MA \cdot MA' \Rightarrow MT^2 = MA \cdot (MA + AA') \Rightarrow MT^2 = 4(4 + 5)$
 $\Rightarrow MT^2 = 36 \Rightarrow MT = 6$

ب) $MT^2 = MA \cdot MA' \Rightarrow 12^2 = MA \times 18 \Rightarrow MA = 8$

$$AA' = MA' - MA = 18 - 8 = 10$$

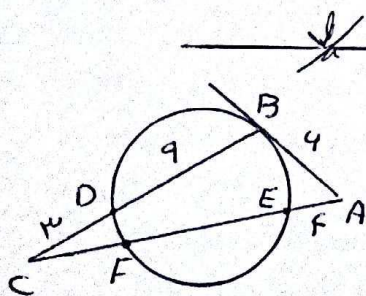


تقریباً: با توجه به شکل مطلوبیت محاسبه
 مقادیر x و y :

$$EA \cdot EB = ED \cdot EC \Rightarrow 2 \times 10 = x \times 4 \Rightarrow x = 5$$

$$MT^2 = MC \cdot MD \Rightarrow 4^2 = y(y + 9) \Rightarrow y^2 + 9y - 36 = 0$$

$$\Rightarrow (y + 12)(y - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -12 & \text{غیرممکن} \\ y = 3 & \text{واقف} \end{cases}$$



تقریباً: در شکل روبه‌رو AB بر دایره مماس است.
 محیط مثلث ABC را بیابید.

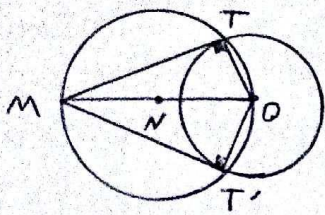
$$AB^2 = AE \cdot AF \Rightarrow 4^2 = 4 \times AF \Rightarrow AF = 4$$

$$\Rightarrow EF = AF - AE = 4 - 4 = 0$$

$$CD \cdot CB = CF \cdot CE \Rightarrow 3(3 + 9) = CF(CF + FE) \Rightarrow 36 = CF(CF + 4)$$

$$\Rightarrow CF^2 + 4CF - 36 = 0 \Rightarrow (CF + 9)(CF - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} CF = -9 & \text{غیرممکن} \\ CF = 4 & \text{واقف} \end{cases}$$

$$\text{محیط } \triangle ABC = AB + AC + BC = AB + (AE + EF + FC) + (CD + DB) = 4 + (4 + 0 + 4) + (3 + 9) = 20$$



رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره :

برای رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره

مانند M ، بصورت زیر عمل می‌کنیم :

(۱) نقطه M را به مرکز دایره وصل می‌کنیم .

(۲) وسط MO را نقطه N می‌نامیم .

(۳) از نقطه N دایره‌ای به شعاع MN رسم می‌کنیم محل تلاقی را T و T' .

می‌نامیم MT و MT' دو مماس هستند و $MT = MT'$ زیرا :

$$\left. \begin{array}{l} \text{شعاع } OT = OT' \\ \text{مستقیم } MO = MO \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{ملاعق}]{\text{وتر و یک}} \triangle MOT \cong \triangle MOT' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} MT = MT' \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \Rightarrow \text{مماس } TMT' \text{ بر دایره } MO \end{array} \right.$$

مماس مشترک دو دایره :

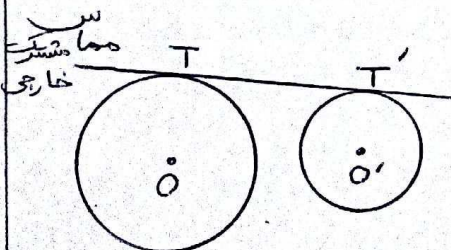
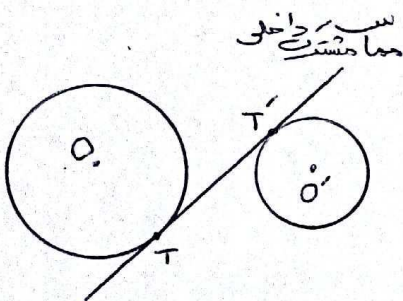
مماس مشترک دو دایره ، خطی است که بر هر دو دایره مماس باشد ، مماس

مشترک دو دایره ، بر دو نوع است :

(۱) مماس مشترک داخلی :

آن دو دایره در طرفین خط مماس باشند ،

خط مماس را مماس مشترک داخلی می‌گوئیم .

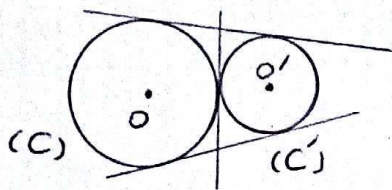


(۲) آن دو دایره در یک طرف خط مماس باشند ،

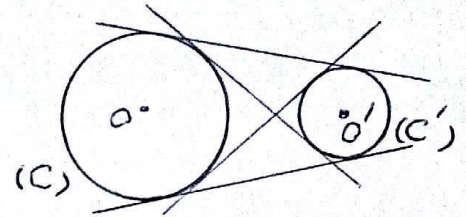
خط مماس را مماس مشترک خارجی می‌گوئیم .

نمودار: دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ با طول خط مرکزی d مفروض اند
با در نظر گرفتن اوضاع نسبی این دو دایره، در هر حالت مماس‌های مشترک
داخلی و خارجی این دو دایره را رسم کنید.

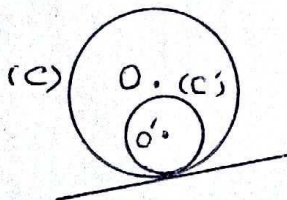
(۲) دو دایره مماس بیرونی اند.
دو مماس مشترک خارجی و
یک مماس مشترک داخلی دارند.



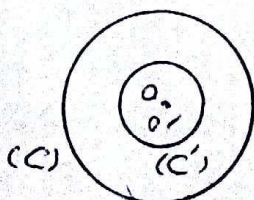
(۱) دو دایره متقاطع هستند.
دو مماس مشترک داخلی و
دو مماس مشترک خارجی دارند.



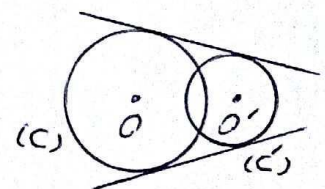
(۴) دو دایره مماس درونی اند.
فقط یک مماس مشترک خارجی
دارند.



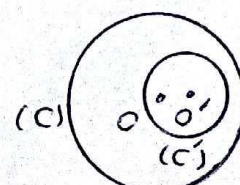
(۱) دو دایره هم‌مرکزند.
هیچ مماس مشترکی ندارند.



(۳) دو دایره متقاطع اند.
فقط دو مماس مشترک خارجی دارند.



(۵) دو دایره متداخل اند.
هیچ مماس مشترکی ندارند.

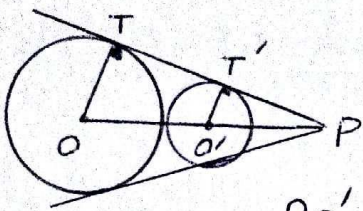


مثال: دو دایره $C(O, ۳)$ و $C'(O', ۲)$ مفروض اند. مرکز این دو دایره نقاط $O(m-۱, ۲)$ و $O'(۳, -۲)$ هستند. این دو دایره در کل سه مماس مشترک داشته باشند.
مقدار m را بیابید.

$$OO' = R + R' \Rightarrow \sqrt{(m-1-3)^2 + (2-(-2))^2} = 3+2 \Rightarrow \sqrt{(m-4)^2 + 16} = 5$$

$$\Rightarrow (m-4)^2 + 16 = 25 \Rightarrow (m-4)^2 = 9 \Rightarrow m-4 = \pm 3 \Rightarrow m = 1 \vee 7$$

مثال: دودایره به شعاع های ۲ و ۳ مماس خارج اند. مماس مشترک خارجی آنها یکدیگر را در نقطه P قطع کرده اند. فاصله P را تا مرکز دایره بزرگتر بیابید.



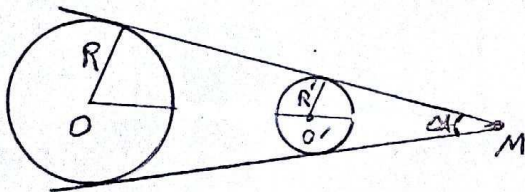
حل: مطابق شکل، شعاع به خط مماس عمود است.

پس: $OT \parallel O'T'$ طبق قضیه تالس؛

$$\frac{PO'}{PO} = \frac{O'T'}{OT} \Rightarrow \frac{PO'}{PO' + OO'} = \frac{R'}{R} \Rightarrow \frac{PO'}{PO' + (2+3)} = \frac{2}{3}$$

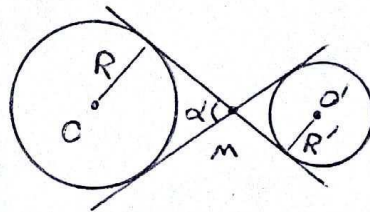
$$\Rightarrow 3PO' = 2PO' + 10 \Rightarrow PO' = 10 \Rightarrow PO = PO' + OO' = 10 + (2+3) = 15$$

فرمول محاسبه زاویه بین مماس های مشترک خارجی و داخلی



α = زاویه بین مماس های مشترک خارجی

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{|R - R'|}{d}$$



α = زاویه بین مماس های مشترک داخلی

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R + R'}{d}$$

مثال: شعاع دودایره متخارج ۲d و ۷d است. اگر طول خط مرکزین این دودایره برابر 4d باشد زاویه بین دو مماس مشترک داخلی دودایره را بیابید.

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R + R'}{d} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2d + 7d}{4d} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{9d}{4d} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 30^\circ \Rightarrow \boxed{\alpha = 60^\circ}$$

مثال: زاویه بین مماس های مشترک خارجی دودایره متخارج ۹۰ است. اگر طول خط مرکزین این دودایره ۱۰۷۲ بوده و شعاع یکی از دایره ها سه برابر شعاع دایره دیگر باشد، مساحت دایره بزرگتر را بیابید.

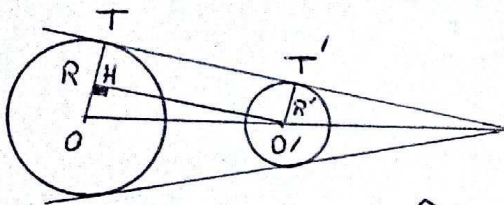
$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{|R-R'|}{d} \Rightarrow \sin \frac{90^\circ}{2} = \frac{|R-3R|}{10\sqrt{2}} \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{2R}{10\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2R}{10\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 2R=10 \Rightarrow \boxed{R=5} \Rightarrow \text{شعاع دایره بزرگ} = 3R = 3 \times 5 = 15$$

$$S = \pi (15)^2 = 225\pi$$

قضیه: در دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ اگر طول مماس خارج باشد

$$و \quad OO' = d \quad ثابت کنید: \quad TT' = \sqrt{d^2 - (R-R')^2} \quad \text{خارجی}$$



اثبات: از O' عمود $O'H$ را بر OT رسم

می کنیم چهارضلعی $TT'O'H$ مستطیل است

طبق رابطه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه $OO'H$ داریم:

$$(OO')^2 = O'H^2 + OH^2 \Rightarrow d^2 = TT'^2 + (R-R')^2 \Rightarrow TT' = \sqrt{d^2 - (R-R')^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{TT'_{\text{خارجی}} = \sqrt{d^2 - (R-R')^2}}$$

مثال ۱: دو دایره $C(O, 7)$ و $C'(O', 1)$ مفروضند. اگر طول خط المکزی

این دو دایره ۱۰ باشد طول مماس مشترک خارجی این دو دایره را بیابید.

$$TT'_{\text{خارجی}} = \sqrt{d^2 - (R-R')^2} = \sqrt{10^2 - (7-1)^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$$

مثال ۲: طول مماس مشترک خارجی دو دایره متقاطع به شعاع های ۱۲ و ۴ برابر ۸ است. طول خط المکزی این دو دایره را بیابید.

$$TT'_{\text{خارجی}} = \sqrt{d^2 - (R-R')^2} \Rightarrow 8 = \sqrt{d^2 - (12-4)^2} \Rightarrow 8 = \sqrt{d^2 - 64} \Rightarrow 64 = d^2 - 64 \Rightarrow d^2 = 128 \Rightarrow \boxed{d=11.31}$$

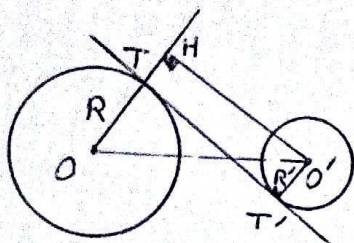
مثال ۳: مقدار a را چنان تعیین کنید که طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع های ۳ و ۸ و طول خط المکزی ۱۳ برابر $(a-3)$ باشد.

$$TT'_{\text{خارجی}} = \sqrt{d^2 - (R-R')^2} \Rightarrow a-3 = \sqrt{13^2 - (3-8)^2} \Rightarrow a-3 = \sqrt{169 - 25} \Rightarrow a-3 = 12 \Rightarrow \boxed{a=15}$$

قضیه: در دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ ، طول مماس داخل TT' است. با فرض $OO' = d$ ثابت کنید:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R+R')^2}$$

داخلی



اثبات: از O' عمود $O'H$ را بر امتداد OT رسم می‌کنیم چهارضلعی $HO'T'T'$ مستطیل است درصورتی‌که زاویه $HO'O'$ طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$(OO')^2 = OH^2 + O'H^2 \Rightarrow d^2 = (R+R')^2 + TT'^2 \Rightarrow TT'^2 = d^2 - (R+R')^2$$

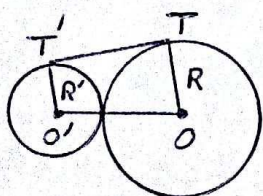
$$\Rightarrow \boxed{TT' = \sqrt{d^2 - (R+R')^2}} \text{ داخلی}$$

نست: حاصله مراکز دو دایره برابر 41 cm و شعاع دایره کوچک 4 cm و شعاع دایره بزرگتر $d \text{ cm}$ است. طول مماس مشترک داخلی دو دایره: $TT' = 39$ سانتیمتر است.

۴۰ (۴)	۳۹ (۳)	۴۱ (۴)
--------	--------	--------

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R+R')^2} = \sqrt{41^2 - (4+4)^2} = \sqrt{1411 - 11} = \sqrt{1400} = 39$$

قضیه: ثابت کنید طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس بیرونی برابر است با:

$$TT' = 2\sqrt{RR'}$$


اثبات: چون دو دایره مماس بیرونی هستند پس:

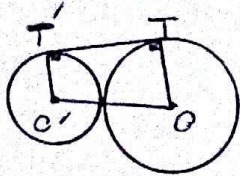
$$OO' = d = R + R'$$

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R-R')^2} = \sqrt{(R+R')^2 - (R-R')^2} = \sqrt{(R^2 + R'^2 + 2RR') - (R^2 + R'^2 - 2RR')} = \sqrt{4RR'} = 2\sqrt{RR'}$$

خارجی

$$\Rightarrow \boxed{TT' = 2\sqrt{RR'}} \text{ خارجی}$$

مثال) مطابق شکل دایره‌ها به شعاع ۸ و ۲ بوده و مماس خارج اند. محیط و مساحت چهارضلعی $T'TOO'$ را مشخص کنید. (TT' مماس مشترک خارجی دو دایره است)



$$TT' = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{8 \times 2} = 2 \times 4 = 8$$

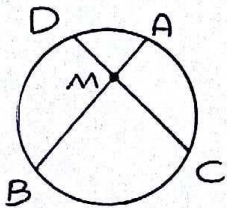
چهارضلعی $T'TOO'$ دوزخه قائم الزویه است.

$$S = \frac{(1+2) \times 8}{2} = 12$$

$$P = 8 + 2 + 10 + 8 = 28$$

تمرین ۲۳

۱) در دایره $C(0, R)$ وتر AB و وتر CD به طول ۹ سانتی‌متر را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم کرده است. اگر $AB = 11 \text{ cm}$ آنگاه وتر CD و وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟



$$\frac{DM}{MC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DM}{DM+MC} = \frac{1}{1+2} \Rightarrow \frac{DM}{CD} = \frac{1}{3}$$

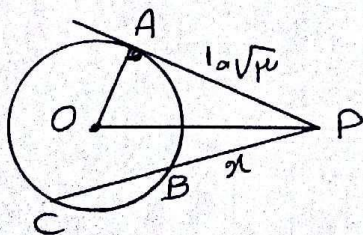
$$\Rightarrow \frac{DM}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{DM = 3} \Rightarrow MC = 9 - 3 = 6$$

$$AM = x \Rightarrow MB = 11 - x$$

$$AM \cdot MB = DM \cdot MC \Rightarrow x(11-x) = 3 \cdot 6 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

$$AM = 3, MB = 11 - 3 = 8$$

۲) از نقطه P در خارج دایره‌ای، مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (A روی دایره است). همچنین خط راستی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطه B و C قطع کرده است و $BC = 20$ ، طول PB و PC را بیابید.



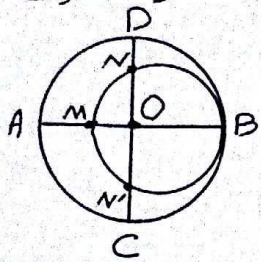
$$AP^2 = PB \cdot PC \Rightarrow (10\sqrt{3})^2 = x(20+x)$$

$$\Rightarrow 300 = 20x + x^2 \Rightarrow x^2 + 20x - 300 \Rightarrow (x-10)(x+30) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -30 \\ x = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 10 \Rightarrow BP = 10 \Rightarrow PC = 10 + 20 = 30$$

۱۳ در شکل مقابل دو دایره به هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر به هم عمودند آنرا $AM=14$ و $ND=10$ شعاع های دو دایره را پیدا کنید.



حل: می دانیم قطر عمود بر هر وتر، و تر و کمان نظیرین را نصف می کند پس $ON=ON'$

$$AM=14 \quad , \quad OM=x \quad , \quad ON=ON'=y \quad , \quad ND=10$$

در دایره کوچکتر دو وتر در داخل دایره متقاطعند پس داریم:

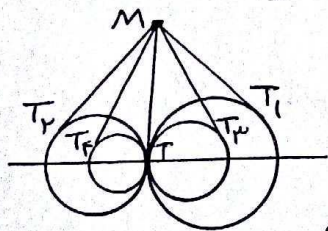
$$OM=OD \quad (\text{شعاع دایره بزرگ}) \Rightarrow 14+x=y+10 \Rightarrow y=4+x$$

$$ON \cdot ON' = OM \cdot OB \Rightarrow y \cdot y = x(14+x) \xrightarrow{y=4+x} (4+x)^2 = x(14+x)$$

$$\Rightarrow x^2 + 12x + 34 = 14x + x^2 \Rightarrow 34 = 2x \Rightarrow \boxed{x=9}$$

$$\text{شعاع دایره بزرگ} = 14+9=23 \quad \text{قطر دایره کوچک} = 23+9=32 \Rightarrow \frac{32}{2}=16 = \text{شعاع دایره کوچک}$$

۱۴ مطابق شکل مقابل، تمام دایره ها در نقطه T به هم مماس اند. از نقطه M روی مماس مشترک آنها به دایره ها مماس رسم کرده ایم ثابت کنید:



$$MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4 = \dots$$

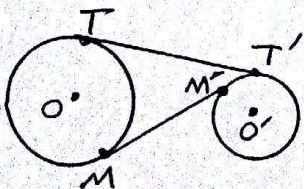
حل: می دانیم دو مماسی که از نقطه ای خارج دایره

بر آن رسم شود با هم برابرند از نقطه M دو مماس

بر دایره رسم شده پس $MT = MT_1$ در دایره کوچکتر از نقطه M نیز دو مماس

بر آن رسم شده پس $MT = MT_2$ به همین ترتیب $MT = MT_3 = MT_4 = \dots$

۱۵ طول شعاع های دو دایره متخارج را برست آفرید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{15}$ و طول خط المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.

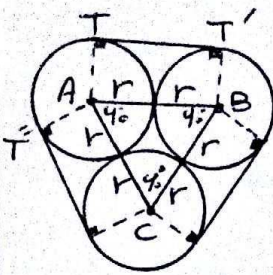


$$OO'=8 \quad TT'=3\sqrt{7}=\sqrt{49} \quad MM'=\sqrt{15}$$

$$TT'^2 = OO'^2 - (R-R')^2 \Rightarrow 49 = 64 - (R-R')^2 \Rightarrow R-R'=1$$

$$MM'^2 = OO'^2 - (R+R')^2 \Rightarrow 15 = 64 - (R+R')^2 \Rightarrow R+R'=7$$

$$\begin{cases} R - R' = 1 \\ R + R' = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow 2R = 1 \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{2}}, \boxed{R' = \frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$



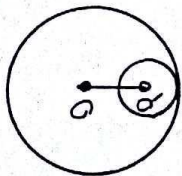
۴) سه دایره به شعاع های برابر r دایره دو به هم مماس اند مطابق شکل مقابل، این سه دایره به وسیله نخ بسته شده اند، نشان دهید طول این نخ برابر $4r + 2\pi r$ است همچنین نشان دهید مساحت ناحیه محدود به سه دایره برابر $r^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3})$ است.

$$TT' = 2r \quad \widehat{AT'T} = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 120^\circ) = 120^\circ \quad \widehat{TT'} = \frac{120^\circ}{360^\circ} (2\pi r) = \frac{2}{3}\pi r$$

$$\text{طول نخ} = 3(2r) + 3(\frac{2}{3}\pi r) = 4r + 2\pi r$$

$$S_{\text{محدود}} = S_{\triangle ABC} - S_{\text{سه دایره}} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2r)^2 - \frac{1}{2} \pi r^2 = r^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})$$

۷) طول خط مرکزین دو دایره متداخل مساوی $2cm$ و مساحت ناحیه محدود بین آنها 14π سانتیمتر مربع است. طول شعاع های دو دایره را بیست آورید.



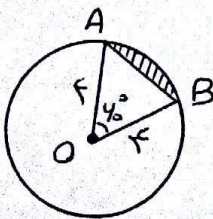
$$OO' = R - R' = 2$$

$$S_{\text{محدود}} = S_{\text{دایره بزرگ}} - S_{\text{دایره کوچک}} \Rightarrow 14\pi = \pi R^2 - \pi R'^2 = \pi(R^2 - R'^2)$$

$$\Rightarrow R^2 - R'^2 = 14 \Rightarrow (R - R')(R + R') = 14 \Rightarrow 2(R + R') = 14 \Rightarrow R + R' = 7$$

$$\begin{cases} R - R' = 2 \\ R + R' = 7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{R = 4.5}, \boxed{R' = 2.5}$$

۸) مطابق شکل در دایره به شعاع r مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه یک قطعه دایره نام دارد.



$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \hat{O} = \frac{1}{2} (r)(r) \sin 40^\circ = r^2 \sin 40^\circ$$

$$S_{\text{قطعه}} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} = \frac{\pi (r^2) (40^\circ)}{360^\circ} = \frac{10\pi}{9} = \frac{10\pi}{9}$$

$$S_{\text{هاشور زده}} = S_{\text{شکل}} - S_{\text{قطعه}} = \frac{10\pi}{9} - r^2 \sin 40^\circ$$

ماده ۲

هندسه ۲

چند ضلعی های محیطی و محاطی؛

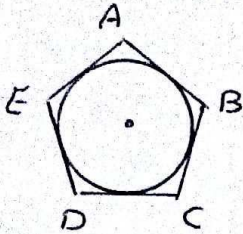
تعریف ۱: یک چند ضلعی را محیطی می گوئیم اگر و فقط اگر دایره ای در

صفحه چند ضلعی وجود داشته باشد که بر تمام

امتلاعات آن مماس باشد. دایره گفته شده را دایره

محاطی چند ضلعی می گوئیم. در شکل روبه

پنج ضلعی محیطی است.

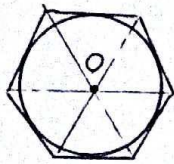


تعریف ۲: یک چند ضلعی را محیطی می گوئیم

اگر و فقط اگر نیمساز داخلی تمام زاویه های

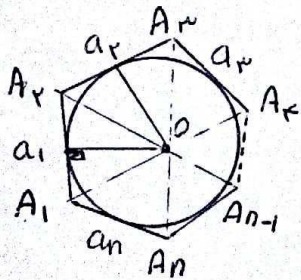
در یک نقطه همدس باشند. این نقطه مرکز دایره

محاطی چند ضلعی است.



مثال) اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط P شعاع دایره

محاطی برابر r باشد ثابت کنید: $r = \frac{S}{P}$ یا $S = rP$



فرض	یک n ضلعی محیطی با محیط P و مساحت S است
حکم	$r = \frac{S}{P}$ (شعاع دایره محاطی)

اثبات: مطابق شکل مرکز دایره محاطی یعنی نقطه O

را به رؤوس n ضلعی محیطی $A_1 A_2 \dots A_n$ وصل می کنیم. در این صورت

این n ضلعی به n مثلث تقسیم می شود که مساحت کل n ضلعی با جمع مساحت این n مثلث مساوی است.

$$S = S_{\triangle OA_1 A_2} + S_{\triangle OA_2 A_3} + \dots + S_{\triangle OA_n A_1}$$

$$= \frac{a_1 r}{2} + \frac{a_2 r}{2} + \dots + \frac{a_n r}{2} = \frac{r}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \frac{r}{2} \times P$$

$$\Rightarrow \boxed{S = rP} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{r = \frac{S}{P}}$$

مثال) یک n ضلعی محیطی با مساحت ۲۰ و محیط ۱۰ مفروض است.
مساحت دایره محاطی این n ضلعی را بیابید.

$$S = 20$$

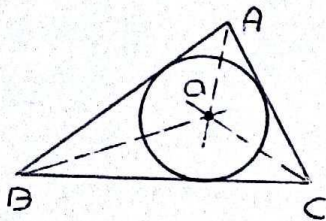
$$2P = 10 \Rightarrow P = 5$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{20}{5} \Rightarrow r = 4$$

$$S_{\text{دایره محاطی}} = \pi r^2 = \pi (4)^2 = 16\pi$$

دایره محاطی مثلث:

مرکز دایره محاطی هر مثلث، محل برخورد نیمسازهای داخلی مثلث است.



$$r = \text{شعاع دایره محاطی}$$

$$S = \text{مساحت مثلث}$$

$$2P = \text{محیط مثلث}$$

$$r = \frac{S}{P}$$

مثال) شعاع دایره محاطی مثلثی با اضلاعی به طول ۱۲ و ۱۳ و ۱۴ را بیابید.

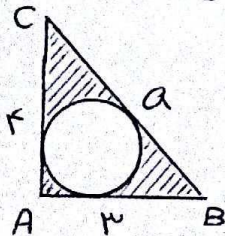
$$13^2 = 12^2 + d^2 \Rightarrow \text{رابطه فیثاغورس برقرار است} \Rightarrow \text{مثلث قائم الزویه}$$

$$S = \frac{d \times 12}{2} = 36$$

$$2P = d + 12 + 13 = 30 \Rightarrow P = 15$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{36}{15} = 2.4$$

مثال) مساحت محصور به مثلث قائم الزاویه‌ای به اضلاع قائم ۳ و ۴ و دایره محاطی آن را بیابید.



$$a^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$S = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

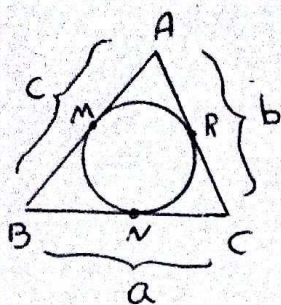
$$P = \frac{3 + 4 + 5}{2} = 6$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow S_{\text{دایره محاطی}} = \pi r^2 = \pi (1)^2 = \pi$$

$$S_{\text{زنی}} = 6 - \pi = 2.14$$

۲۷

هندسه ۲



مثال) مطابق شکل دایره محاطی مثلث ABC به محیط $2P$ رسم شده و نقاط M و N و R محل تماس این دایره با اضلاع مثلث هستند ثابت کنید:

$$AM = AR = P - a \quad BM = BN = P - b \quad CR = CN = P - c$$

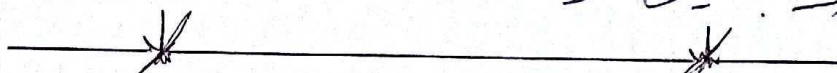
اثبات: می دانیم طول مماس های مرسوم از یک نقطه خارج دایره بر دایره باهم مساویند

$$AM = AR \quad BM = BN \quad CN = CR$$

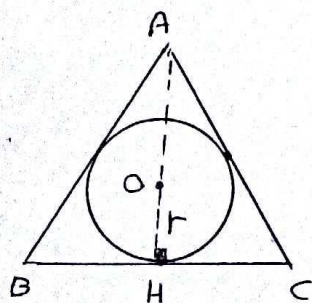
$$2P = AB + AC + BC = (AM + BM) + (AR + CR) + (BN + CN)$$

$$\Rightarrow 2P = 2AM + 2BN + 2CN \Rightarrow P = AM + \frac{BN + CN}{a} \Rightarrow AM = P - a$$

دو حالت دیگر به همین ترتیب ثابت می شود.



مثال) مثلث متساوی الاضلاع ABC بر دایره ای به شعاع r محیط است. محیط و مساحت این مثلث را بر حسب r بیابید



حل: می دانیم مرکز دایره محاطی مثلث محل برخورد نیمسازهای داخلی آن است از طرفی در مثلث متساوی الاضلاع میانده ها و نیمسازها برهم

منطبق هستند در نتیجه مرکز دایره محاطی مثلث همان محل برخورد میانده های این مثلث است و می دانیم محل برخورد میانده ها، هر میانده را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می کند.

$$OA = 2OH \Rightarrow OA = 2r \Rightarrow AH = OA + OH = 2r + r = 3r$$

$$AH = 3r$$

$$\left. \begin{array}{l} AH = 3r \\ AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{2} = 3r \Rightarrow a = \frac{4r}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{4r\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{محیط} = 2P = 3a = 3\left(\frac{4r\sqrt{3}}{3}\right) = 4r\sqrt{3}$$

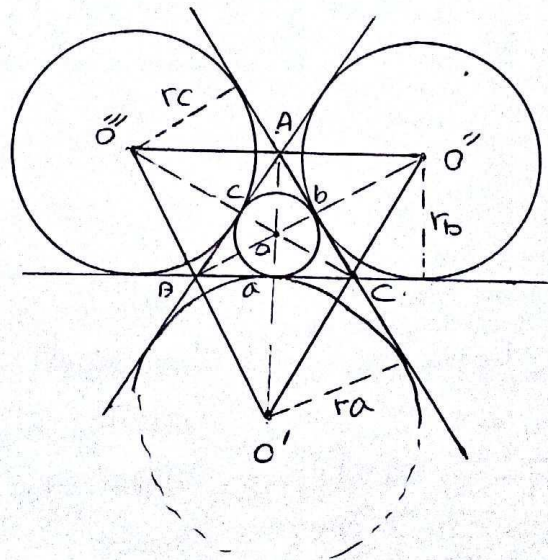
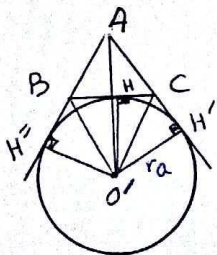
$$\text{مساحت} = S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\frac{4r\sqrt{3}}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3} r^2$$

دایره محاطی خارجی مثلث :

باتوجه به این که نیمساز داخلی یکی از زاویه های داخلی هر مثلث با دو نیمساز خارجی زاویه های دیگر در یک نقطه هم می رسند پس این نقطه از یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث به یک فاصله است.

مطابق شکل (۱) نیمساز داخلی $\hat{A}$ با نیمسازهای خارجی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در نقطه O' متقاطع است. فاصله نقطه O' از ضلع $BC = a$ و امتداد دو ضلع $AC = b$ و $AB = c$ یکسان است. بنابراین به مرکز O' شعاعی معادل فاصله O' تا ضلع BC می توانست دایره ای رسم کرد که بر ضلع BC و امتداد اضلاع AB و AC مماس باشد. به این دایره، دایره محاطی خارجی نظیر رأس A می گویند. شعاع دایره محاطی خارجی نظیر رأس A را با r_a نشان می دهیم.

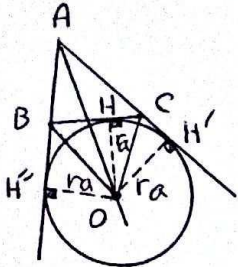
مطابق شکل (۲) هر مثلث دارای سه دایره محاطی خارجی است. در مثلث ABC شعاع سه دایره محاطی خارجی عبارتست از: r_a ، r_b ، r_c



ص ۲۹

هندسه ۲

قضیه: ثابت کنید در مثل $\triangle ABC$ با طول اضلاع a, b, c ، شعاع دایره‌های محاطی خارجی برابر است با: $r_a = \frac{S}{p-a}$ و $r_b = \frac{S}{p-b}$ و $r_c = \frac{S}{p-c}$ که در این فرمولها p نصف محیط مثلث است.



اثبات: مطابق شکل، دایره محاطی خارجی نظیر یک رأس مثلاً رأس A را رسم می‌کنیم و از مرکز این دایره به ضلع BC و امتداد اضلاع AB و AC عمودی کنیم:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OAC} - S_{\triangle OBC}$$

$$\Rightarrow S = \frac{OH'' \times AB}{2} + \frac{OH' \times AC}{2} - \frac{OH \times BC}{2} = \frac{r_a \cdot c}{2} + \frac{r_a \cdot b}{2} - \frac{r_a \cdot a}{2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{r_a}{2} (b + c - a)$$

$$\text{محیط} = 2p = a + b + c$$

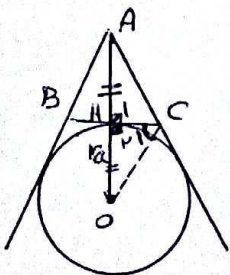
می‌دانیم:

$$S = \frac{r_a}{2} (b + c + a - 2a) \Rightarrow S = \frac{r_a}{2} (2p - 2a) \Rightarrow S = \frac{r_a}{2} \times 2(p - a)$$

$$\Rightarrow S = r_a (p - a) \Rightarrow \boxed{r_a = \frac{S}{p - a}}$$

$$r_c = \frac{S}{p - c} \quad \text{و} \quad r_b = \frac{S}{p - b}$$

مثال) شعاع دایره محاطی خارجی مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a را بیابید.



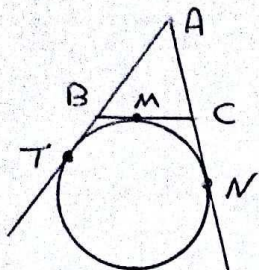
مطابق شکل نیمساز داخلی A (ارتفاع مثلث) و نیمساز خارجی $\hat{C}$ در نقطه O هم‌دیگر را قطع کرده‌اند.

$$\hat{C}_1 = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \Rightarrow \hat{C} \text{ خارجی} = 120^\circ \Rightarrow \hat{C} \text{ داخلی} = 60^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ CH = CH \text{ مشترک} \\ \hat{C}_1 = \hat{C} = 60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACH \cong \triangle OCH \Rightarrow OH = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

نتیجه: شعاع دایره محاطی خارجی در مثلث متساوی الاضلاع با هم برابرند.

مثال) مطابق شکل طول اضلاع مثلث ABC عبارت است از: $a=3$ و $b=d$ و $C=V$ اگر دایره محاطی خارجی این مثلث نظیر رأس A رسم شده باشد حاصل $\frac{BM}{MC}$ را بیابید.



$$AT = AN \Rightarrow AB + BT = AC + CN \Rightarrow C + BM = b + MC$$

$$\Rightarrow V + BM = d + MC \Rightarrow \boxed{BM - MC = -2} \quad (1)$$

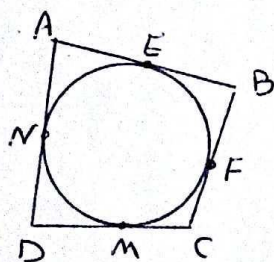
$$BM + MC = BC = a \Rightarrow \boxed{BM + MC = 3} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} BM - MC = -2 \\ BM + MC = 3 \end{cases} + \Rightarrow 2BM = 1 \Rightarrow BM = \frac{1}{2}, d \Rightarrow MC = \frac{2}{1}, d$$

$$\frac{BM}{MC} = \frac{\frac{1}{2}, d}{\frac{2}{1}, d} = \frac{1}{2}$$

چهار ضلعی محیطی

قضیه: یک چهار ضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع طول دو ضلع مقابلش برابر مجموع طول دو ضلع مقابل دیگر باشد.



اثبات: فرض کنیم $ABCD$ چهار ضلعی محیطی باشد

ثابت می‌کنیم: $AB + DC = AD + BC$

$$\begin{aligned} AE &= AN \\ BE &= BF \\ CM &= CF \\ DM &= DN \end{aligned} \quad + \quad \begin{cases} + \\ + \\ + \\ + \end{cases} \Rightarrow (AE + BE) + (CM + DM) = (AN + DN) + (BF + CF)$$

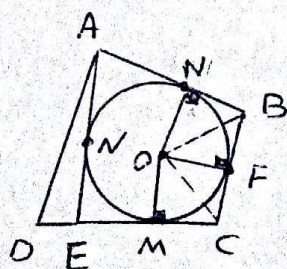
$$\Rightarrow \boxed{AB + CD = AD + BC}$$

عکس قضیه: فرض کنیم $AB + DC = AD + BC$ ثابت می‌کنیم

$ABCD$ چهار ضلعی محیطی است.

مطابق شکل نیمسازهای $\hat{A}$ و $\hat{C}$ در نقطه O هم‌رس اند

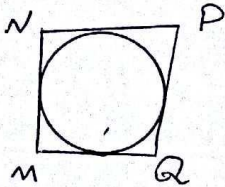
$$\left. \begin{aligned} O \text{ روی نیمساز } B &\Rightarrow ON = OF \\ O \text{ روی نیمساز } C &\Rightarrow OF = OM \end{aligned} \right\} \Rightarrow ON = OF = OM = R$$



دایره‌ای به مرکز O و شعاع R رسم می‌کنیم دایره بر سه ضلع AB و BC و CD مماس است اگر بر AD هم مماس باشد حکم ثابت شده است
فرض کنیم این دایره بر AD مماس نباشد (فرض خلف) از A بر آن مماسی رسم می‌کنیم تا خط CD را در نقطه‌ای مانند E قطع کند.

$$\left. \begin{array}{l} AE + BC = AB + EC \\ AD + BC = AB + DC \end{array} \right\} \Rightarrow E \text{ همان } D \text{ است} \Rightarrow \text{دایره بر } AD \text{ نیز مماس است}$$

مثال: اگر $MN = x + 4$ و $NP = 4x + 5$ و $PQ = 3x + 8$ و $QM = x + 2$ اضلاع متوالی یک چهارضلعی محیطی باشند مقدار x را بیابید



$$MN + PQ = NP + MQ$$

$$x + 4 + 3x + 8 = 4x + 5 + x + 2 \Rightarrow x = 1$$

چند ضلعی محیطی:

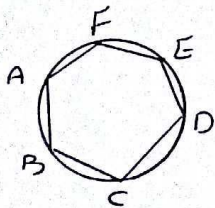
تعریف ۱: یک چند ضلعی را محیطی می‌گوئیم اگر و فقط اگر دایره‌ای در صفحه آن

چند ضلعی وجود داشته باشد که از تمام رئوس

آن چند ضلعی بگذرد. دایره گفته شده را دایره

محیطی چند ضلعی می‌گوئیم. در شکل روبه

پشت $ABCDEF$ یک شش ضلعی محیطی است.

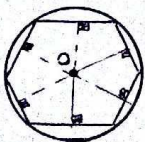


تعریف ۲:

یک چند ضلعی محیطی است اگر و فقط اگر عمود منصف

تمام اضلاعش، در یک نقطه هم‌رس باشند. این نقطه

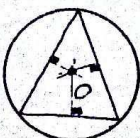
مرکز دایره محیطی چند ضلعی است.



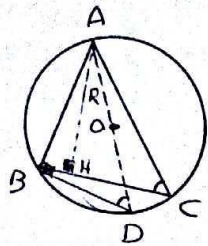
تکته ریاضی:

مرکز دایره محیطی مثلث، محل

برخورد عمود منصف‌های آن است.



قضیه: ثابت کنید در مثلثی به اضلاع a, b, c و مساحت S ، شعاع دایره محیطی از دستور $R = \frac{abc}{4S}$ بدست می آید.



فرض	$R = \frac{abc}{4S}$ شعاع دایره محیطی $\triangle ABC$
حکم	$R = \frac{abc}{4S}$

اثبات: ارتفاع نظیر ضلع BC (یعنی AH) را رسم می کنیم و از نقطه A به مرکز دایره (نقطه O) وصل کردیم و امتداد می دهیم تا دایره را در نقطه D قطع کند. B را به D وصل می کنیم زاویه B محاطی رو بر قطر و در نتیجه قائمه است.

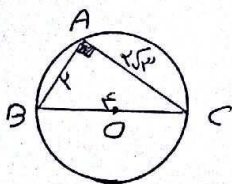
$$\left. \begin{array}{l} \hat{D} = \hat{C} = \widehat{AB} \\ \hat{H} = \hat{B} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{زاویه}} \triangle ABD \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{HC}$$

$$\Rightarrow AH \cdot AD = AB \cdot AC \Rightarrow AH \cdot 2R = c \cdot b$$

$$\Rightarrow AH = \frac{bc}{2R}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{bc}{2R} \Rightarrow S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow \boxed{R = \frac{abc}{4S}}$$

مثال: در مثلثی به طول اضلاع $2, 2, 2\sqrt{3}$ شعاع دایره محیطی را بدست آورید.



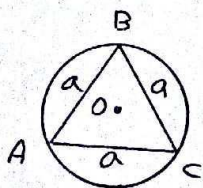
$$2^2 + (2\sqrt{3})^2 = R^2 \Rightarrow \text{شعاع قائم الزامی}$$

$$S = \frac{2 \times 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{2 \times 2 \times 2\sqrt{3}}{4 \times 2\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{R = 2}$$

نتیجه: شعاع دایره محیطی مثلث قائم الزامی برابر نصف وتر است.

مثال: شعاع و مساحت دایره محیطی مثلث متساوی الساقی به طول ضلع a را بدست آورید.



$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{a^3}{4 \left(\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \right)} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{R = \frac{a\sqrt{3}}{3}}$$

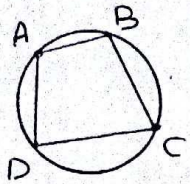
$$S = \pi R^2 = \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2 \Rightarrow \boxed{S = \frac{\pi a^2}{3}}$$

چهار ضلعی محاطی:

قضیه: یک چهار ضلعی محاطی است اگر و فقط اگر دو زاویه مقابلش مکمل یکدیگر باشند.

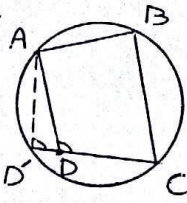
فرض	$ABCD$ یک چهار ضلعی محاطی
حکم	$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$

اثبات:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2} \\ \hat{C} = \frac{\widehat{BAD}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BCD}}{2} + \frac{\widehat{BAD}}{2} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{BAD}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

همچنین ترتیب ثابت می شود: $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$



فرض	$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$
حکم	$ABCD$ یک چهار ضلعی محاطی

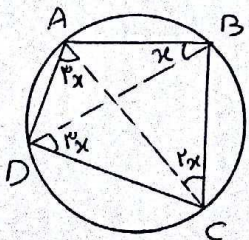
عکس قضیه:

اثبات: می دانیم از سه نقطه غیر واقع بر رأس یک دایره می گذرد. دایره ای رسم می کنیم که از A و B و C بگذرد اگر دایره از D هم بگذرد حکم تمام است. فرض کنیم دایره از D نگذرد پس نقطه D' را روی دایره در نظر می گیریم $D \neq D'$ (فرض خلف) چهار ضلعی $ABCD'$ محاطی است.

$$\left. \begin{array}{l} B + D' = 180^\circ \\ B + D = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow B + D = B + D' \Rightarrow D = D'$$

و این تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

مثال) در شکل روبه رو از رأس های چهار ضلعی $ABCD$ یک دایره می گذرد مقدار x را بیابید.



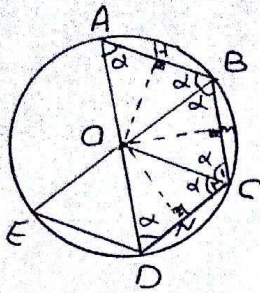
$$\widehat{DAC} = \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow 3x = \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow \widehat{DC} = 4x$$

$$\widehat{ABD} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow x = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{AD} = 2x$$

$$\widehat{ACD} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = 4x$$

$$\widehat{BDC} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 4x$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{AD} = 360^\circ \Rightarrow 18x = 360^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$$



قضیه: ثابت کنید هر n ضلعی منتظم محاطی است.

اثبات: عمود منصف AB و BC را رسم می‌کنیم

OH و OM همدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند O روی

عمود منصف AB و BC است پس: $OA = OB = OC$ ①

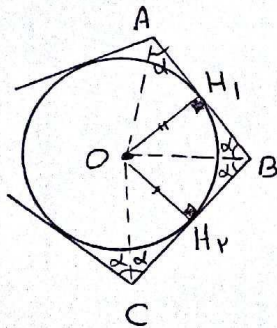
O را به D وصل می‌کنیم

$$\left. \begin{array}{l} BC = CD \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_r = \alpha \\ OC = OC \text{ مشترک} \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{ض. ز. ق.}} \triangle OBC \cong \triangle OCD \Rightarrow OB = OD \quad \text{②}$$

$$OA = OB = OC = OD \Leftarrow \text{①, ②}$$

همین ترتیب ثابت می‌شود $OA = OB = OC = OD = \dots = R$

پس رؤس n ضلعی روی این دایره هستند و n ضلعی منتظم محاطی است.



اثبات: نیمسازهای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را رسم می‌کنیم تا

همدیگر را در O قطع کنند

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \alpha \\ AB = BC \\ B_r = C_1 = \alpha \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{ض. ز. ق.}} \triangle OAB \cong \triangle OBC \Rightarrow OH_1 = OH_r = R$$

همین ترتیب ثابت می‌شود: $OH_1 = OH_2 = OH_3 = \dots = R$ پس

دایره به تمام اضلاع n ضلعی مماس است و n ضلعی منتظم محیطی است.

ص ۳۱

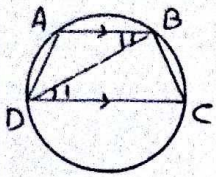
هندسه ۲

تکالیفات ص ۲۹ و ص ۳۰ و ص ۳۱ کتاب درسی

۱ ثابت کنید یک ذوزنقه محاطی است اگر و تنها اگر متناهی الساقین باشد.

ضمیمه ذوزنقه متناهی الساقین

هم ذوزنقه محاطی



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \\ \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \\ \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \hat{C} = \hat{D} \\ \hat{A} = \hat{B} \end{array}$$

ذوزنقه ABCD محاطی است

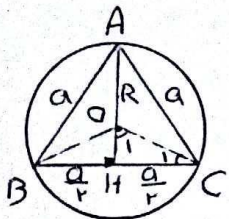
ضمیمه ذوزنقه محاطی

هم ذوزنقه متناهی الساقین

$$(AB \parallel CD, BD \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \Rightarrow \frac{\widehat{BC}}{r} = \frac{\widehat{AD}}{r} \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD} \Rightarrow AD = BC \Rightarrow$$

ABCD متناهی الساقین

۲ مساحت مثلث متناهی الاضلاعی را بیست آورید که در دایره ای به شعاع R محاط شده باشد.



حل: بی دانیم نقطه تقاطع عمود منصف ها در هر مثلث، مرکز دایره محیطی است پس AH عمود منصف است

و چون مثلث متناهی الاضلاع است عمود منصف ها

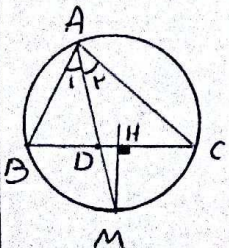
میانه هم هستند و میانه ها همدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می کنند

$$2OH = OA \Rightarrow 2OH = R \Rightarrow OH = \frac{R}{2} \quad AH = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$$

$$\triangle ACH: AH^2 = AC^2 - CH^2 \Rightarrow \left(\frac{3R}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{9R^2}{4} = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow a = \sqrt{3}R$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{3}R)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

۳ ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می کنند



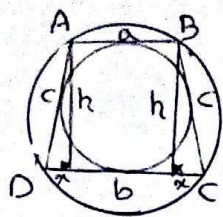
$$BH = CH \quad AD \text{ نیمساز} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \widehat{BM} = \widehat{CM}$$

بی دانیم مرکز دایره محیطی، روی عمود منصف قرار دارد و

قطری که عمود بر وتر باشد و تروکمان آنرا نصف می کند

پس امتداد عمود منصف روی امتداد نیمساز یعنی M دایره محیطی را قطع می کند.

۱۴) یک ذوزنقه هم محیطی است و هم محاطی، ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها



حل: ذوزنقه ABCD محاطی است پس متساوی الساقین است (تبرین ۱)

یعنی $AD=BC=c$ همچنین محیطی است پس: $a+b+c+c \Rightarrow c=\frac{a+b}{2}$

$$b=a+2x \Rightarrow x=\frac{b-a}{2}$$

$$h^2 = c^2 - x^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{a^2+2ab+b^2 - b^2+2ab-a^2}{4} = \frac{4ab}{4} = ab \Rightarrow h=\sqrt{ab}$$

$$S = \frac{(AB+CD) \times h}{2} = \frac{(a+b) \sqrt{ab}}{2} = \underbrace{\frac{1}{2}(a+b)}_{\text{میانگین حسابی}} \times \underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{میانگین هندسی}}$$

۱۵) اگر r_a ، r_b و r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و شعاع دایره محاطی داخلی باشند نشان دهید:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

همچنین ترتیب آنرا h_a ، h_b و h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند نشان دهید:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

۱) ثابت قسمت اول:

$$\text{حل: } S = Pr \Rightarrow r = \frac{S}{P} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{P}{S}$$

همچنین ترتیب: $\frac{1}{r_b} = \frac{P-b}{S}$ و $\frac{1}{r_c} = \frac{P-c}{S}$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{P-a}{S} + \frac{P-b}{S} + \frac{P-c}{S} = \frac{3P-(a+b+c)}{S} = \frac{3P-2P}{S} = \frac{P}{S} = \frac{1}{r}$$

۲) ثابت قسمت دوم:

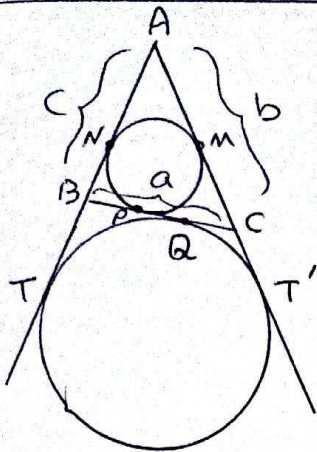
$$S = Pr \Rightarrow r = \frac{S}{P} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{P}{S}$$

همچنین ترتیب: $\frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S}$ ، $\frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{2P}{2S} = \frac{P}{S} = \frac{1}{r}$$

۳۷ ص

هندسه ۲



۱۴) اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث $\triangle ABC$ با اضلاع a, b, c باشند و P باشد و T, P, Q نقطه های تماس یک دایره محاطی خارجی با خطهای شامل دو ضلع باشند نشان دهید:

$$AM = AN = P - a$$

$$BN = BP = P - b$$

$$CM = CP = P - c$$

$$AT = AT' = P$$

(P = نصف محیط)

$$P = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{AN + NB + AM + MC + BP + PC}{2} = \frac{2AN + 2PB + 2PC}{2}$$

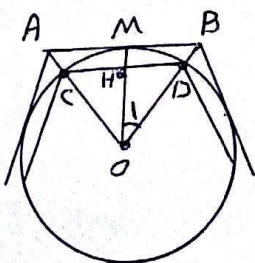
$$\Rightarrow P = AN + \underbrace{PB + PC}_a \Rightarrow AN = AM = P - a$$

$$BN = PB = P - b, \quad CM = CP = P - c \quad \text{بهمین ترتیب ثابت می شود:}$$

$$\left. \begin{array}{l} AT = c + BT \\ AT' = b + CT' \end{array} \right\} \Rightarrow AT + AT' = c + b + (BT + CT') \xrightarrow[BT=BQ, CT'=CQ]{AT=AT'} 2AT = c + b + (BQ + CQ)$$

$$\Rightarrow 2AT = c + b + a \Rightarrow 2AT = 2P \Rightarrow AT = P$$

۱۷) یک دایره به شعاع r ، ضلعی های منتظم محاط و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه های ضلع های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند آنگاه:



$$AB = 2r \tan \frac{180^\circ}{n}$$

$$CD = 2r \sin \frac{180^\circ}{n}$$

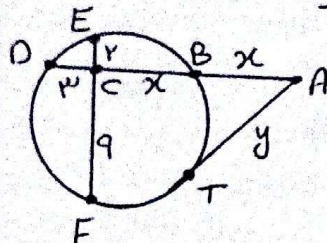
$$\text{حالا: } \hat{O} = \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow \hat{O}_1 = \frac{\hat{O}}{2} = \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}$$

$$\triangle OHD: \sin \hat{O}_1 = \frac{HD}{r} \Rightarrow HD = r \sin \frac{180^\circ}{n} \Rightarrow CD = 2HD = 2r \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$\triangle OMB: \tan \hat{O}_1 = \frac{MB}{OM} \Rightarrow MB = OM \tan \hat{O}_1 = r \tan \frac{180^\circ}{n} \Rightarrow AB = 2MB = 2r \tan \frac{180^\circ}{n}$$

«تمرینات تحلیلی»

۱) در شکل روبه‌رو از نقطه A مماس و قاطعی برداشته شده است. مقادیر x و y را بیابید.



حل: با توجه به شکل وتر BD و EF مقاطع‌انزیس:

$$CD \cdot CB = CE \cdot CF \Rightarrow 3 \times x = 2 \times 4 \Rightarrow \boxed{x = 4}$$

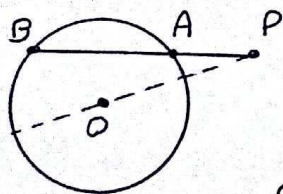
$$AT^2 = AB \cdot AD \Rightarrow y^2 = x(x + x + 3) = 4(4 + 4 + 3) \Rightarrow y^2 = 90 \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{90}}$$

۲) دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ مفروضند. اگر طول مماس مشترک خارجی این دو دایره $3\sqrt{11}$ باشد طول مماس مشترک داخلی آنها را بیابید.

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 3\sqrt{11} = \sqrt{d^2 - (3 - 2)^2} \Rightarrow 99 = d^2 - 1 \Rightarrow \boxed{d = 10}$$

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} = \sqrt{10^2 - (3 + 2)^2} = \sqrt{51}$$

۳) در شکل روبه‌رو اگر $AP = 4$ و $AB = 4$ و محیط دایره 14π باشد فاصله نقطه P از مرکز دایره را بیابید.



حل: نقطه P را به مرکز دایره وصل کرده و امتداد

می‌دهیم. می‌دانیم حاصلضرب قطعات حاصل

روی هر قاطع مرسوم از یک نقطه خارج دایره برابر مقدار

ثابت $d^2 - R^2$ است ($OP = d$)

$$2\pi R = 14\pi \Rightarrow R = 7$$

$$PA \cdot PB = d^2 - R^2 \Rightarrow 4(4 + 4) = d^2 - 7^2 \Rightarrow d = \sqrt{104}$$

فصل ۲

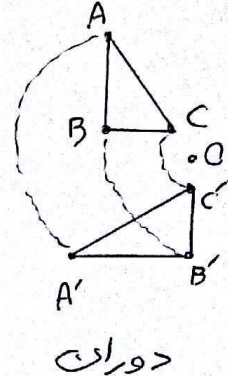
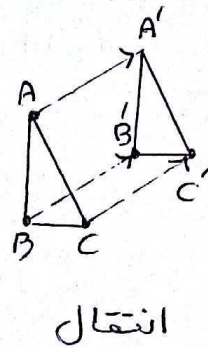
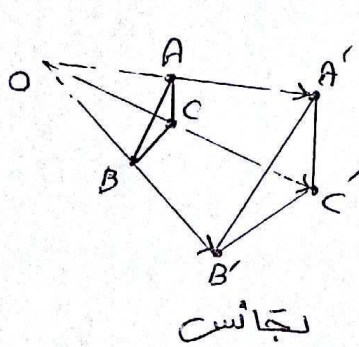
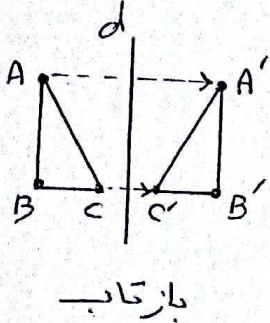
تبدیل‌های هندسی و کاربردها:

تعریف تبدیل: (Transformation)

تبدیلی مانند T ، تابعی است که هر نقطه مانند A از صفحه P را دقیقاً به یک نقطه مانند A' از همین صفحه نظیر می‌کند و بالعکس و آنرا بصورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\begin{cases} T: P \rightarrow P \\ T(A) = A' \end{cases}$$

در شکل‌های زیر تعدادی از تبدیل‌های متداول نشان داده شده است:



تبدیل طولی (اینیومتری):

تبدیلی که طول یا زاویه را حفظ می‌کند تبدیل طولی (اینیومتری) نامیده می‌شود.

به عبارت دیگر اگر $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ آنگاه $AB = A'B'$

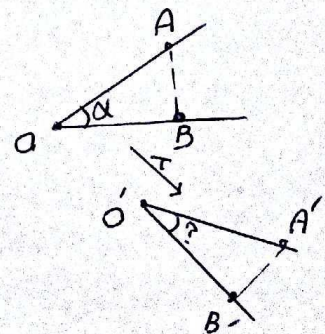
قضیه: ثابت کنید هر تبدیل طولی، اندازه زاویه را حفظ می‌کند

اثبات: فرض کنیم T تبدیل طولی است و داریم:

$$T(A) = A' \quad T(B) = B' \quad T(O) = O'$$

می‌دانیم تبدیل طولی حاصله را ثابت نگه می‌دارد پس:

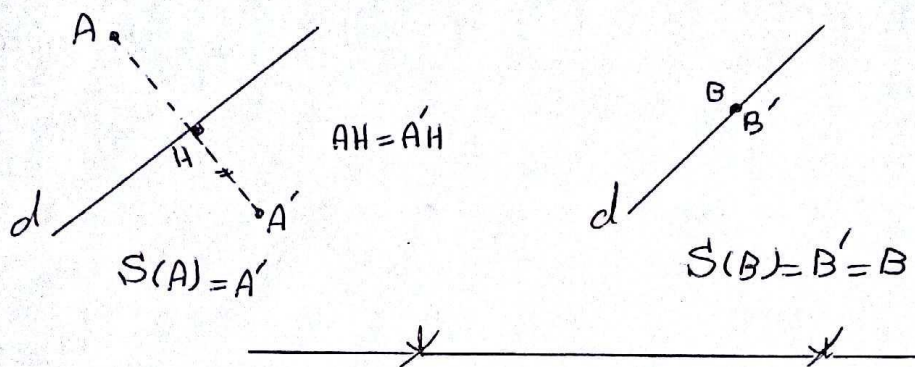
$$\begin{cases} OA = O'A' \\ OB = O'B' \\ AB = A'B' \end{cases} \Rightarrow \triangle OAB \cong \triangle O'A'B' \Rightarrow \hat{O} = \hat{O'}$$



نتیجه: در هر تبدیل طولی، تبدیل یا فاصله زاویه، زاویه‌ای هم‌اندازه آن است.

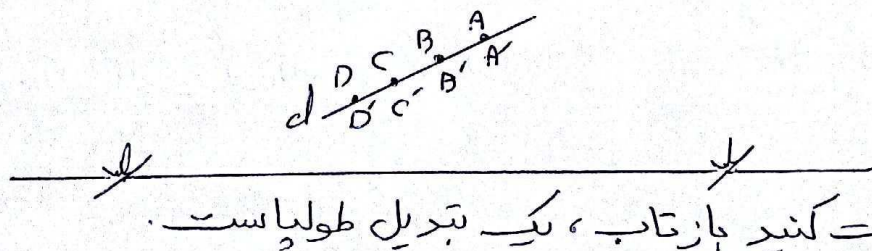
تعریف بازتاب:

به ازای هر خط d در صفحه، بازتاب S نسبت به خط d تبدیلی است که هر نقطه مانند A را که روی خط d قرار نداشته باشد به نقطه‌ای مانند A' تصویر کند به طوری که خط d عمود منصف AA' باشد و تصویر هر نقطه مثل B که روی خط d قرار داشته باشد به خودش منطبق کند خط d را محور تقارن بازتاب یا محور بازتاب می‌نامند.

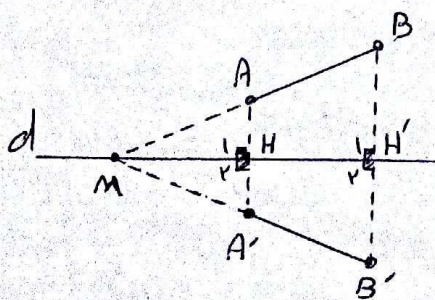


تعریف نقطه ثابت تبدیل:

در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل یافته آن به خود آن نقطه منطبق می‌شود، نقطه ثابت تبدیل می‌نامند.
نتیجه: بازتاب نسبت به خط، بیشمار نقطه ثابت تبدیل دارد.



قضیه: ثابت کنید بازتاب، یک تبدیل طولیاست.



$$\left. \begin{array}{l} AH = A'H \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \\ MH = MH \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Delta \text{ ضلع} \\ \Rightarrow \Delta MAH \cong \Delta MA'H \\ \Rightarrow MA = MA' \end{array}$$

بجمله‌ای ترتیب ثابت می‌شود $MB = MB'$

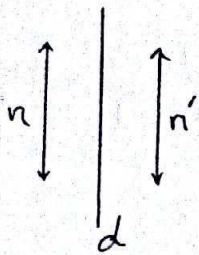
$$\left. \begin{array}{l} AB = MB - MA \\ A'B' = MB' - MA' \\ MB = MB', MA = MA' \end{array} \right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

(مخالف کمال در نظر گرفته)

نتیجه: در هر بازتاب، اندازه هر پاره خط و اندازه تصویر آن با هم برابرند

$$\left. \begin{array}{l} S(A) = A' \\ S(B) = B' \end{array} \right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

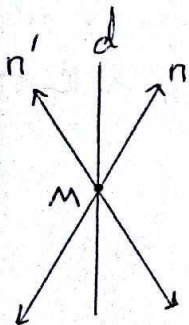
قضیه: ثابت کنید در حالت کلی بازتاب، نسبت خط را حفظ نمی کند



اثبات: دو حالت کلی زیر را در نظر می گیریم:

الف) خط داده شده با خط بازتاب موازی است
اگر خط n موازی خط بازتاب d باشد تصویر آن را تحت بازتاب، خط n' می نامیم

خطوط n و n' با هم موازیند زیرا برای رسم خط n' باید دو نقطه از n در نظر گرفت و از آنها دو عمود بر d رسم کرد و امتداد داد تا خط n' رسم شود (چون این خطوط بر n و d عمودند پس: $n \parallel d \parallel n'$ و نسبت حفظ می شود).



ب) خط داده شده با خط بازتاب موازی نباشد.

اگر خط n با خط بازتاب d موازی نباشد خطهای d و n و n' در نقطه ای مانند M متقاطع هستند پس n و n' موازی نیستند و در این حالت بازتاب نسبت خط را حفظ نمی کند.

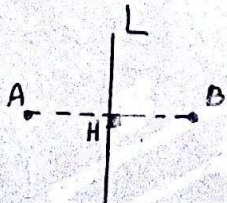
خواص بازتاب:

(۱) بازتاب، تبدیلی طولی (ایزومتر) است.

(۲) بازتاب نسبت خط را حفظ نمی کند.

(۳) بازتاب جهت شکل (جهت نامتناهی شکل) را حفظ نمی کند.

تقرین L : اگر $A(۱, ۳)$ بازتاب $B(-۵, ۳)$ نسبت به خط L باشد معادله خط L را بنویسید:



$$\begin{array}{l} H \mid \frac{-5+3}{2} = 1 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow H(1, 1)$$

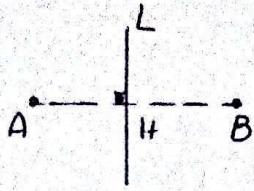
$$m_{AB} = \frac{-1-3}{3-(-5)} = -\frac{1}{2}$$

قرینه و مکوس

$$\Rightarrow m_L = 2$$

$$L: y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow L: y = 2x + 3$$

نقدین ۲: بازتاب نقطه $A(2, 3)$ نسبت به خط $y = -3x - 1$ چیست؟



$$m_L = -3 \Rightarrow m_{AB} = \frac{1}{3} \quad AB: y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{3}(x - 2)$$

$$\Rightarrow y - 3 = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \quad AB \text{ معادله}$$

$$\begin{cases} y = -3x - 1 \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = -1 \\ -x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = -1 \\ -3x + 9y = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow H \left| \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

$$x_H = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{2 + x_B}{2} \Rightarrow x_B = -4$$

$$y_H = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 2 = \frac{3 + y_B}{2} \Rightarrow y_B = 1$$

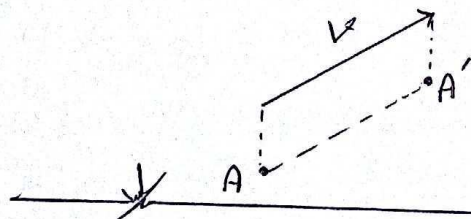
$$\Rightarrow B \left| \begin{matrix} -4 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

تعریف انتقال: (Translation)

انتقال T تحت بردار $\vec{v}$ ، تبدیلی از صفحه است که در آن تصویر هر نقطه مانند A از صفحه P ، نقطه‌ای مانند A' در همان صفحه است که:

$$\vec{AA'} = \vec{v}$$

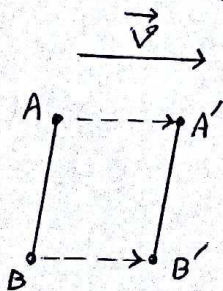
$$\vec{AA'} \parallel \vec{v}$$



قضیه: ثابت کنید انتقال تبدیل طولی (انزوئتری) است.

اثبات: $A'B'$ چاره خطی است که تحت بردار $\vec{v}$

انتقال یافته است.



$$\begin{cases} \vec{AA'} = \vec{v} \\ \vec{BB'} = \vec{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AA' = BB' \\ AA' \parallel BB' \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{متوازی} \\ \text{المثلث} \end{matrix} AA'B'B \Rightarrow AB = A'B'$$

خواص انتقال:

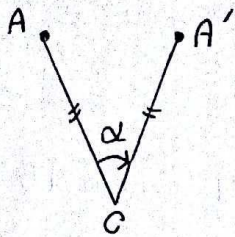
- انتقال یک تبدیل طولی (انزوئتری) است.
- انتقال سبب خط را حفظ می‌کند.

۳) انتقال جهت شکل را حفظ می‌کند.

۴) بردارهایی که هر نقطه را به نقطه تصویرش انتقال می‌دهند دارای طولها برابر و جهت‌ها یکسان هستند.

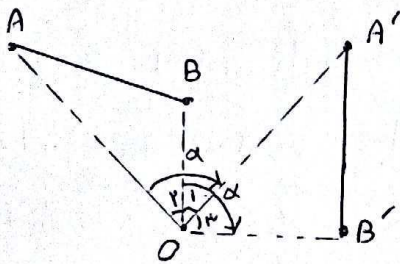
تعریف دوران: (Rotation)

دوران R به مرکز نقطه ثابت O و زاویه α تبدیلی از صفحه است که در آن اگر A' تصویر نقطه A باشد داریم:



$$OA = OA' \text{ و } \angle AOA' = \alpha$$

قضیه: ثابت کنید دوران یک تبدیل طولی (ایزومتر) است.

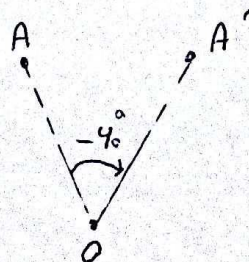
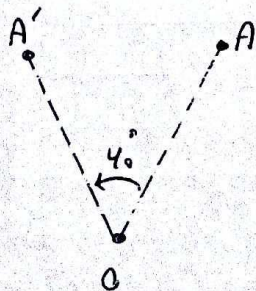


$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \alpha \\ \hat{O}_1 + \hat{O}_3 = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}_1 + \hat{O}_3 \Rightarrow \hat{O}_2 = \hat{O}_3$$

$$\left. \begin{array}{l} OA = OA' \\ \hat{O}_2 = \hat{O}_3 \\ OB = OB' \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{قضیه} \\ \Rightarrow \triangle OAB \cong \triangle OA'B' \end{array} \Rightarrow AB = A'B'$$

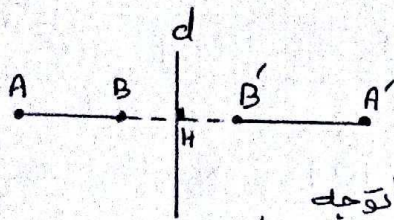
خواص دوران:

- ۱) دوران حول نقطه O و تحت زاویه α ، مرکز دوران را ثابت نگه می‌دارد.
- ۲) دوران سبب خط را همواره حفظ نمی‌کند مگر دورانهای 180° و 360° .
- ۳) دوران حول نقطه O و تحت زاویه α ، یک تبدیل ایزومتر (طولی) است پس شکل دوران یافته یا شکل اولیه همبست بوده و زاویه‌های شکل ثابت می‌مانند.
- ۴) دوران در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت را مثبت و دوران در جهت حرکت عقربه‌های ساعت را منفی در نظر می‌گیریم.



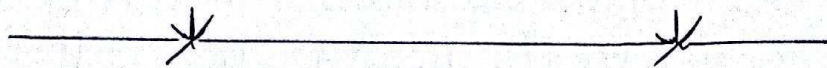
تقریب ۱ ص ۴۴ :

در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد ثابت کنیم که آئر $A'B'$ بازتاب AB باشد $A'B'$ هم انداز اند.



$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} AH = A'H \\ BH = B'H \end{cases} \Rightarrow AH - BH = A'H - B'H \Rightarrow AB = A'B' \end{aligned}$$

باتوجه به ویژگی بازتاب



تعریف تجانس :

آئر O نقطه ای ثابت در صفحه و $K \neq 0$ یک عدد حقیقی باشد نقطه M را مجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس K می گوئیم هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد :

۱) سه نقطه O ، M و M' روی یک خط راست باشند.

$$OM' = |K| \cdot OM \quad (۲)$$

۳) آئر K مثبت باشد، M' روی نیم خط OM و نقاط M و M' در یک طرف نقطه O قرار دارند (مثال)

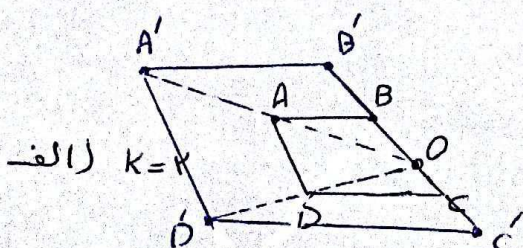
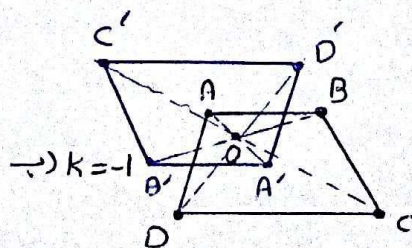
$$K=2 \quad O \cdots M \cdots M' \quad OM' = 2OM$$

$$K=\frac{1}{3} \quad O \cdots M' \cdots M \quad OM' = \frac{1}{3}OM \quad \left(\frac{OM'}{OM} = K\right) \quad K>0$$

آئر K منفی باشد نقطه O بین نقاط M و M' قرار می گیرد.

$$K=-2 \quad M' \cdots O \cdots M \quad OM' = 2OM \quad \left(\frac{OM'}{OM} = K\right) \quad K<0$$

مثال) مجانس هر شکل را به مرکز O و نسبت تجانس داده شده رسم کنیم.



خلاصه ریاضی:

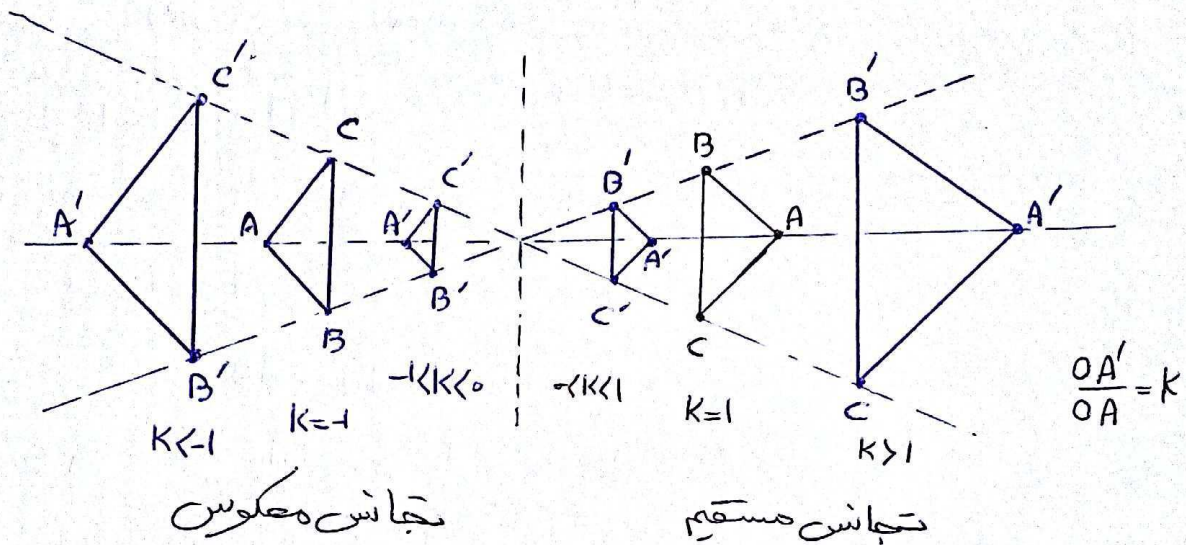
در تجانس به مرکز O و نسبت k :

۱) اگر $k > 0$ ، تجانس را، تجانس مستقیم می نامیم.

۲) اگر $k < 0$ ، تجانس را، تجانس معکوس می نامیم.

۳) اگر $0 < k < 1$ (یا $k < 0$) تصویر شکل، کوچکتر می شود و آنرا انقباض می نامیم.

۴) اگر $k > 1$ (یا $k < 0$) تصویر شکل، بزرگتر می شود و آنرا انبساط می نامیم.

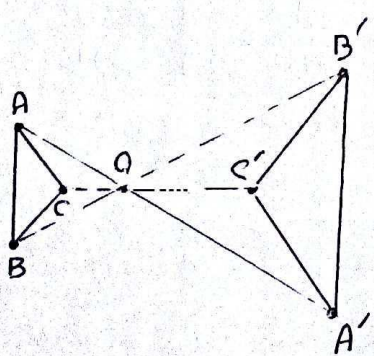


تقریباً ۱ ص ۵:

۱) در تجانس با نسبت $k < 0$ و مرکز تجانس O نشان دهید:

الف) تجانس شبیه خط را حفظ می کند

حل: می دانیم A' مجانش A و B' مجانش B است.



$$\begin{aligned} OA &= |k| \cdot OA' \\ OB &= |k| \cdot OB' \end{aligned} \Rightarrow \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = k$$

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ متقابل بر راس

$$\Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OA'B' \Rightarrow \begin{cases} \hat{OAB} = \hat{OA'B'} \\ \hat{OBA} = \hat{OB'A'} \end{cases}$$

در نتیجه $AB \parallel A'B'$

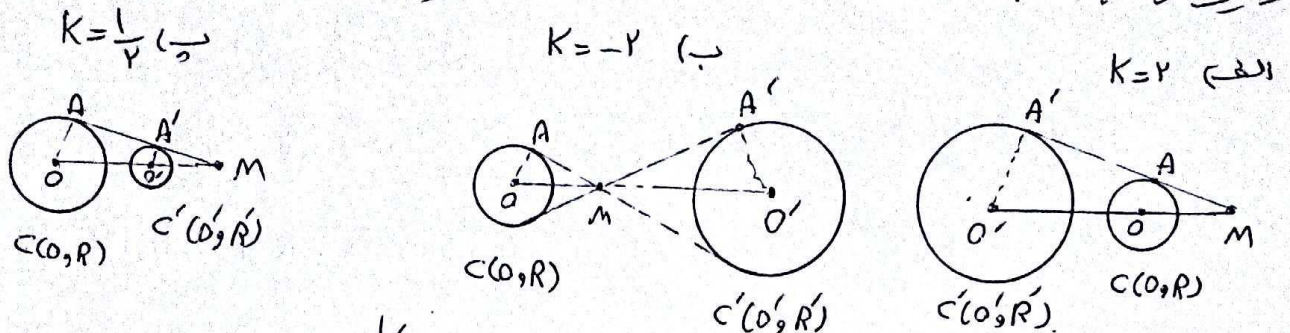
ب) تجانس زاویه بین خطوط را حفظ می کند.

$$\begin{aligned} AB \parallel A'B' \text{ و } AA' \text{ مورب} &\Rightarrow \hat{OAB} = \hat{OA'B'} \\ AC \parallel A'C' \text{ و } AA' \text{ مورب} &\Rightarrow \hat{OAC} = \hat{OA'C'} \end{aligned} \Rightarrow \hat{OAB} - \hat{OAC} = \hat{OA'B'} - \hat{OA'C'} \Rightarrow \hat{A} = \hat{A'}$$

(طبق الف)

تمرین ۲ ص ۴۶

دایره $C(O, R)$ و نقطه M خارج این دایره مفروض است. مجانش این دایره را نسبت به نقطه M در هر حالت رسم کنید:



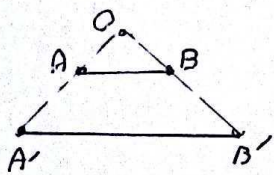
قضیه: ثابت کنید بجانش سب خط را حفظ می کند.

حالت اول: مرکز بجانش (O) روی پاره خط AB است

در این حالت واضح است که مجانش های A و B یعنی A' و B' هم در امتداد AB قرار گرفته و در نتیجه AB و $A'B'$ روی یک خط واقع شده و سب آنها مساوی می شود.

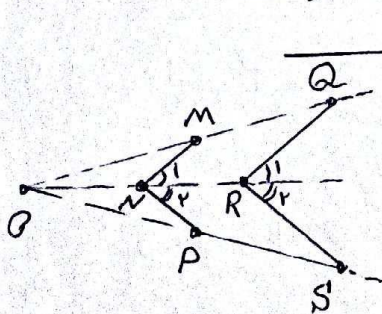
حالت دوم: مرکز بجانش روی پاره خط AB نیست

در این حالت مطابق شکل A' و B' ، مجانش های A و B را می یابیم



$$\left. \begin{aligned} A' \Rightarrow OA' &= |K|OA \\ B' \Rightarrow OB' &= |K|OB \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OB'} = \frac{|K|OA}{|K|OB} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$$

عکس ناسر $\Rightarrow AB \parallel A'B' \Rightarrow \angle AB = \angle A'B'$



قضیه: ثابت کنید بجانش اندازه زاویه را حفظ می کند.

اثبات: فرض کنیم $Q\hat{R}S$ مجانش $M\hat{N}P$ به مرکز بجانش O و نسبت بجانش K باشد. می دانیم بجانش سب خط را حفظ می کند:

$$\left. \begin{aligned} MN \parallel QR &\Rightarrow \hat{N}_1 = \hat{R}_1 \\ NP \parallel RS &\Rightarrow \hat{N}_2 = \hat{R}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{N}_1 + \hat{N}_2 = \hat{R}_1 + \hat{R}_2 \Rightarrow M\hat{N}P = Q\hat{R}S$$

خواص بجانش:

- (۱) بجانش سب خط را حفظ می کند
- (۲) بجانش همیشه جهت شکل را حفظ نمی کند (چون $K < 0$ باشد)
- (۳) بجانش طول یا مساحت را حفظ نمی کند (مگر در حالت $|K|=1$)
- (۴) بجانش طول و محیط را به نسبت K و مساحت را به نسبت K^2 تغییر می دهد.
- (۵) خطوطی که نقاط صجانش را به هم وصل می کنند در مرکز بجانش هم رسند.

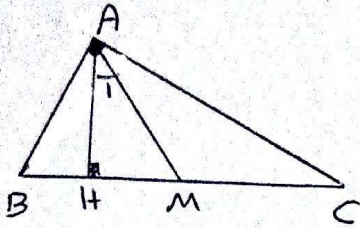
۴۷

هندسه ۲

فصل ۳ :

روابط طولی در مثلث :

۱) روابط طولی در مثلث قائم الزاویه :



$$1) AH^2 = BH \cdot CH$$

$$2) AB^2 = BH \cdot BC$$

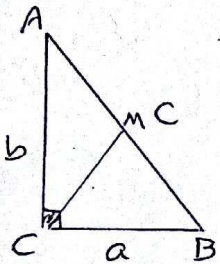
$$3) AC^2 = CH \cdot BC$$

$$4) AH \cdot BC = AB \cdot AC$$

$$5) AM = \frac{BC}{2}$$

$$6) \hat{A}_1 = |\hat{B} - \hat{C}|$$

مثال ۱ : در مثلث قائم الزاویه ای به مساحت ۴۴، نسبت اضلاع قائم ۳ به ۴ است. طول میانه وارد بر وتر در این مثلث چقدر است؟



$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{4}b$$

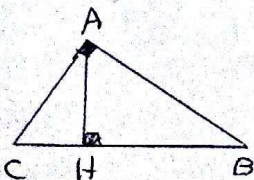
$$S = \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}b + b}{2} = 44 \Rightarrow \frac{3}{4}b^2 = 104 \Rightarrow b^2 = 144 \Rightarrow \boxed{b = 12}$$

$$a = \frac{3}{4}b = \frac{3}{4} \times 12 \Rightarrow \boxed{a = 9}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \Rightarrow \boxed{c = 15}$$

$$CM = \frac{AB}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$$

مثال ۲ : در مثلث قائم الزاویه روبرو $BH = 12$ و $CH = 4$ است. محیط و مساحت مثلث ABC را بیابید.



$$AH^2 = BH \cdot CH = 12 \times 4 = 48 \Rightarrow AH = 4\sqrt{3}$$

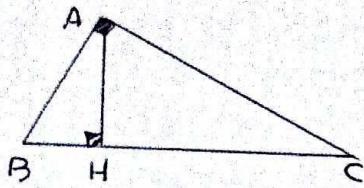
$$BC = BH + CH = 12 + 4 = 16$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = \frac{1}{2} \times 16 \times 4\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$$

$$AC^2 = CH \cdot BC = 4 \times 16 = 64 \Rightarrow AC = 8$$

$$AB^2 = BH \cdot BC = 12 \times 16 = 192 \Rightarrow AB = 8\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\text{محیط}}{ABC} = 8\sqrt{3} + 8 + 16 = 8(\sqrt{3} + 3)$$

مثال ۳: در مثل قائم الزامیه روبرو آئر $AC=8$ و $BC=10$ باشد طول باخچه BH و CH چقدر است؟

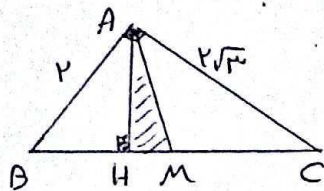


$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AB^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow AB^2 = 36 \Rightarrow AB = 6$$

$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow 36 = BH \times 10 \Rightarrow BH = 3.6$$

$$CH = BC - BH = 10 - 3.6 = 6.4$$

مثال ۴: در مثل قائم الزامیه ABC طول اضلاع قائم 2 و $2\sqrt{3}$ است. مساحت مثل AMH چقدر است؟ (AM صیانه وارد بر وتر است)



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = (2)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4 + 12 = 16 \Rightarrow BC = 4$$

$$\Rightarrow AM = \frac{BC}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

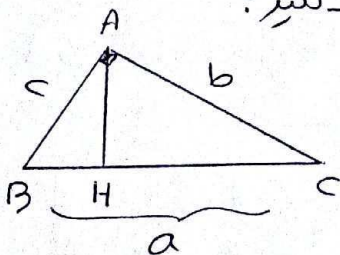
$$\triangle ABC: AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH \times 4 = 2 \times 2\sqrt{3} \Rightarrow AH = \sqrt{3}$$

$$\triangle AHM: MH^2 + AH^2 = AM^2 \Rightarrow MH^2 + (\sqrt{3})^2 = 2^2 \Rightarrow MH^2 = 1 \Rightarrow MH = 1$$

$$S_{\triangle AHM} = \frac{1}{2} \times MH \times AH = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

قضیه: در مثل قائم الزامیه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) ثابت کن:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AB^2}$$



$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AH \cdot BC \\ S &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \end{aligned} \right\} \Rightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC = 2S$$

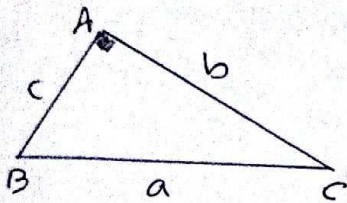
$$\Rightarrow AH^2 \cdot BC^2 = AB^2 \cdot AC^2 \Rightarrow \frac{1}{AH^2 \cdot BC^2} = \frac{1}{AB^2 \cdot AC^2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{BC^2}{AB^2 \cdot AC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2 \cdot AC^2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$$

۴۹

هندسه ۲

فصلیه: ثابت کنید در هر مثلث قائم الزویه، نسبت هر کدام از اضلاع به سینوس زاویه روبرویش برابر است با وتر مثلث:



$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = a \quad \begin{array}{l} \text{مفروضه} \\ \text{هم} \end{array}$$

اثبات: می دانیم در هر مثلث قائم الزویه، سینوس هر زاویه حاده برابر است با نسبت ضلع مقابل بر وتر:

$$\sin \hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{\sin \hat{B}} = a \quad (1)$$

$$\sin \hat{C} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{\sin \hat{C}} = a \quad (2)$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{a}{\sin 90^\circ} = \frac{a}{1} = a \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = a$$

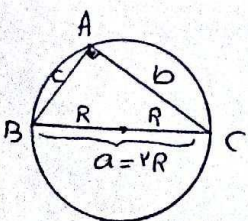
مسئله ۱: در مثلث قائم الزویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) اگر $\tan \hat{B} = \sqrt{2}$ ، و $a = 2\sqrt{3}$ ، اندازه ضلع AB را بیابید.

$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \tan \hat{B} = \cot \hat{C} = \sqrt{2}$$

$$1 + \cot^2 \hat{C} = \frac{1}{\sin^2 \hat{C}} \Rightarrow 1 + (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{\sin^2 \hat{C}} \Rightarrow 3 = \frac{1}{\sin^2 \hat{C}} \Rightarrow \sin^2 \hat{C} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \hat{C} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\xrightarrow{\hat{C} \text{ حاده}} \sin \hat{C} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{c}{\sin \hat{C}} = a \Rightarrow \frac{c}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow c = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{c = 2}$$

فصلیه: ثابت کنید در هر مثلث قائم الزویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبرو به آن ضلع برابر است با قطر دایره محیطی مثلث:



$$a = 2R$$

$$\sin \hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{\sin \hat{B}} = a \Rightarrow \frac{b}{\sin \hat{B}} = 2R \quad (1)$$

$$\sin \hat{C} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{\sin \hat{C}} = a \Rightarrow \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R \quad (2)$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{a}{\sin 90^\circ} = \frac{a}{1} = a = 2R \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

مثال d) در مثلث قائم الزاویه $\hat{A} = 90^\circ$ شعاع دایره محیط برابر R است ثابت کنید:

$$\frac{b^2}{R^2} + \frac{c^2}{R^2} = 4$$

اثبات: $\frac{b^2}{R^2} + \frac{c^2}{R^2} = \frac{b^2 + c^2}{R^2} = \frac{a^2}{R^2} = \frac{(2R)^2}{R^2} = \frac{4R^2}{R^2} = 4$

مثال d) در یک مثلث قائم الزاویه، محیط دایره محیط برابر 20π است اگر یکی از زاویه های حاده این مثلث 4° باشد مساحت مثلث را بیابید.

$\hat{A} = 90^\circ, \hat{B} = 4^\circ \Rightarrow \hat{C} = 86^\circ$

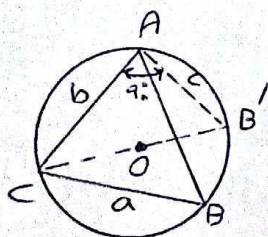
$محیط = 20\pi \Rightarrow 2\pi R = 20\pi \Rightarrow R = 10$

$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R \Rightarrow \frac{b}{\sin 4^\circ} = \frac{c}{\sin 86^\circ} = 20 \Rightarrow \begin{cases} b = 10\sqrt{3} \\ c = 10 \end{cases}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c = \frac{1}{2} \times 10\sqrt{3} \times 10 = 50\sqrt{3}$

قضیه سینوس ها: در هر مثلث غیر مستقیم، نسبت طول هر ضلع به سینوس زاویه مقابلش برابر است با قطر دایره محیط مثلث.

$AB = c, AC = b, BC = a$	ضلع
$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$	هم



اثبات: دو حالت در نظر می گیریم:

حالت اول: مثلث ABC را با زاویه های حاده A و B و C

در نظر می گیریم. رأس C را به مرکز دایره محیطی

یعنی نقطه O وصل کرده و امتدادی دهیم تا زاویه را در B' قطع کند.

$\hat{B}' = \hat{B} \Rightarrow \sin \hat{B} = \sin \hat{B}'$ ①

زاویه محاطی $B'AC$ رو بویه قطر است پس: $\hat{B'AC} = 90^\circ$

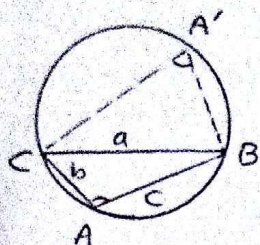
قائم الزاویه $B'AC$: $\sin \hat{B}' = \frac{b}{B'C} = \frac{b}{2R} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{b}{2R} \Rightarrow \frac{b}{\sin \hat{B}} = 2R$

مثال

هندسه ۲

به همین ترتیب با رسم قطرهای گذرنده از رأس های A و B ثابت می شود:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$



حالت دوم: مثلث ABC را با ضلع $\hat{A} > 90^\circ$ در نظر می گیریم:

نقطه A' را به طغیاه روی دایره محیطی مثلث ABC و در طرف دیگر رأس A در نظر می گیریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} \text{ محاطی} = \frac{\widehat{BAC}}{2} \\ \hat{A}' \text{ محاطی} = \frac{\widehat{BAC}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{A}' = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{BAC}}{2} = \frac{360}{2} = 180^\circ$$

چون زاویه A منفرجه است پس $\hat{A}'$ حاده خواهد بود از طرفی چون $\hat{A}$ و $\hat{A}'$

مکمل اند پس سینوس آنها مساوی است یعنی: $\sin \hat{A} = \sin \hat{A}'$ (۵)

مثلث $A'BC$ دارای سه زاویه حاده است طبق قسمت الف داریم:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}'} = 2R \xrightarrow{(5)} \frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

به همین ترتیب ثابت می شود:

مثال ۱: در مثلث ABC با فرض $b = 20$ و $\hat{B} = 30^\circ$ و $c = 20\sqrt{2}$ مطلوب است شعاع دایره محیطی مثلث و اندازه زاویه های $\hat{A}$ و $\hat{C}$:

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = 2R \Rightarrow \frac{20}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow \frac{20}{\frac{1}{2}} = 2R \Rightarrow 40 = 2R \Rightarrow \boxed{R = 20}$$

$$\frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R \Rightarrow \frac{20\sqrt{2}}{\sin \hat{C}} = 40 \Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 45^\circ \\ \hat{C} = 135^\circ \end{cases}$$

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ \\ \hat{A} = 180^\circ - (30^\circ + 135^\circ) = 15^\circ \end{cases}$$

مثال ۲: در مثلثی $a=4$ و $b=4\sqrt{3}$ ، اندازه ضلع AB را بیابید.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{4}{\sin 30^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} B=40^\circ \\ B=140^\circ \end{cases}$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 40^\circ) \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ \\ \hat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 140^\circ) \Rightarrow \hat{C} = 10^\circ \end{cases}$$

$$\hat{C} = 90^\circ \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 4^2 + (4\sqrt{3})^2 = 16 + 48 = 64 \Rightarrow \boxed{c=8}$$

$$\hat{C} = 10^\circ = \hat{A} \Rightarrow \text{مساوی الساقین } \triangle ABC \Rightarrow c = a = 4$$

مثال ۳: مساحت دایره محیطی مثلث ABC برابر 14π است. اگر $c=4\sqrt{3}$ و $b=4$ مطلوب است مقدار a (زاویه $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هر دو حاده هستند).

$$S = \pi R^2 \Rightarrow 14\pi = \pi R^2 \Rightarrow \boxed{R=4}$$

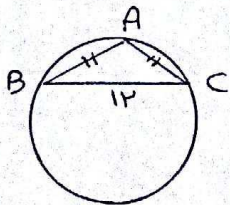
$$\frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow \frac{4}{\sin B} = 8 \Rightarrow \sin B = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{B} = 30^\circ$$

$$\frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{4\sqrt{3}}{\sin C} = 8 \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{C} = 40^\circ$$

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - (30^\circ + 40^\circ) = 90^\circ \Rightarrow a = 2R = 8$$

مثال ۴: طول قاعده مثلث متساوی الساقی ۱۲ و شعاع دایره محیطی آن

$4\sqrt{3}$ است. طول ساق مثلث را بیابید.



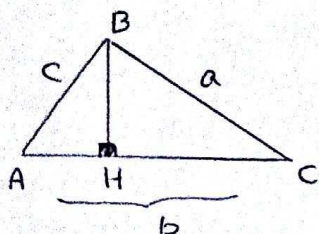
$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{12}{\sin A} = 2(4\sqrt{3}) \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 40^\circ \\ \hat{A} = 140^\circ \end{cases}$$

$$\hat{A} = 40^\circ \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 40^\circ \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow \frac{b}{\sin 40^\circ} = 2(4\sqrt{3}) \Rightarrow b = 8\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$$

$$\hat{A} = 140^\circ \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 20^\circ \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow \frac{b}{\sin 20^\circ} = 2(4\sqrt{3}) \Rightarrow b = 8\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 4\sqrt{3}$$

قضیه کسینوس ها :

در هر مثلث مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربعات اندازه های دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصلضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها



$$AB=c, AC=b, BC=a$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

ضلع
م

حالت اول : $\hat{A} < 90^\circ$

$$\cos \hat{A} = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c \cdot \cos \hat{A}$$

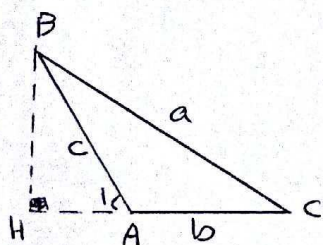
$$\sin \hat{A} = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c \cdot \sin \hat{A}$$

$\triangle BHC$: $a^2 = BH^2 + CH^2 = (c \cdot \sin \hat{A})^2 + (b - AH)^2 = c^2 \sin^2 \hat{A} + b^2 - 2bAH + AH^2$

$$\Rightarrow a^2 = c^2 \sin^2 \hat{A} + b^2 - 2b(c \cdot \cos \hat{A}) + c^2 \cos^2 \hat{A} \Rightarrow a^2 = c^2 (\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A}) + b^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}}$$

به همین ترتیب در رابطه بعدی اثبات می شود.



حالت دوم : $\hat{A} > 90^\circ$

$$\sin \hat{A}_1 = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c \cdot \sin \hat{A}_1$$

$$\cos \hat{A}_1 = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c \cdot \cos \hat{A}_1$$

$\triangle BHC$: $a^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow a^2 = (c \cdot \sin \hat{A}_1)^2 + (b + AH)^2$

$$\Rightarrow a^2 = c^2 \sin^2 \hat{A}_1 + b^2 + AH^2 + 2b \cdot AH \Rightarrow a^2 = c^2 \sin^2 \hat{A}_1 + b^2 + c^2 \cos^2 \hat{A}_1 + 2b(c \cdot \cos \hat{A}_1)$$

$$\Rightarrow a^2 = c^2 (\sin^2 \hat{A}_1 + \cos^2 \hat{A}_1) + b^2 + 2bc \cdot \cos \hat{A}_1$$

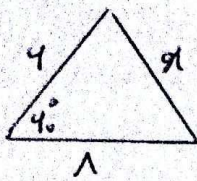
$$\Rightarrow a^2 = c^2 + b^2 + 2bc (-\cos \hat{A}) \Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}}$$

به همین ترتیب در رابطه دیگر اثبات می شوند.

حالت سوم : $\hat{A} = 90^\circ$ در این صورت قضیه کسینوس ها تبدیل به رابطه پیتاغورس می شود.

هندسه ۲

ص ۴۲



مثال ۱: مطلوب است محاسبه x :

$$x^2 = 4^2 + 1^2 - 2(4)(1) \cos 4^\circ = 17 - 8 \cos 4^\circ$$

$$\Rightarrow x^2 = 17 \Rightarrow x = \sqrt{17}$$

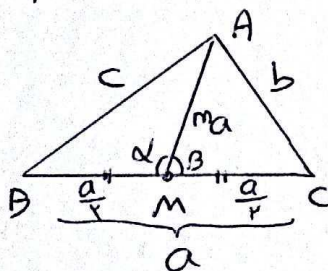
مثال ۲: طول اضلاع مثلثی $2\sqrt{2}$ و $4\sqrt{2}$ و $\sqrt{54}$ است. بزرگترین زاویه مثلث را بیابید.

$$(\sqrt{54})^2 = (2\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2(2\sqrt{2})(4\sqrt{2}) \cos \theta$$

$$\Rightarrow 54 = 8 + 32 - 32 \cos \theta \Rightarrow 14 = -32 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{4} \Rightarrow \theta = 110^\circ$$

قضیه میانه ها:

ثابت کنید در هر مثلث مجموع مربعات هر دو ضلع برابر است با ضلع سوم. مربع ضلع سوم به علاوه دو برابر مربع میانه وارد بر ضلع سوم:



BC وسط M و $AM = m_a$

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{4} + 4m_a^2$$

$$a^2 + c^2 = \frac{b^2}{4} + 4m_b^2$$

$$a^2 + b^2 = \frac{c^2}{4} + 4m_c^2$$

$$\triangle AMB: c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2 - 2m_a \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \cos \alpha \Rightarrow c^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - am_a \cos \alpha \quad (1)$$

$$\triangle ACM: b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2 - 2m_a \left(\frac{a}{2}\right) \cos \beta \Rightarrow b^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - am_a \cos \beta \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow b^2 + c^2 = 2\left(\frac{a^2}{4}\right) + 2m_a^2 - am_a (\cos \alpha + \cos \beta)$$

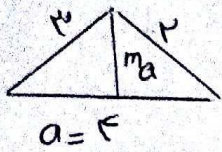
چون α, β مکمل هستند پس: $\cos \alpha = -\cos \beta \Rightarrow \cos \alpha + \cos \beta = 0$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2m_a^2$$

هندسه ۲

ص ۵۵

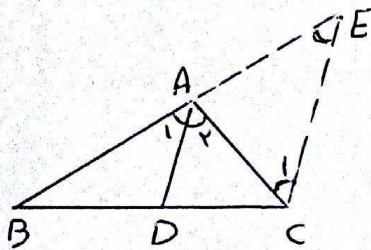
مثال در مثلثی به اضلاع ۲، ۳ و ۴ طول کوچکترین میانه را بیابید.
حل: کوچکترین میانه به بزرگترین ضلع واردی شود.



$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2m_a^2 \Rightarrow 3^2 + 3^2 = \frac{4^2}{2} + 2m_a^2 \Rightarrow m_a^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow m_a = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

قضیه نیسان داخلی:

ثابت کنید در هر مثلث، نیسان هر زاویه ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می کند.



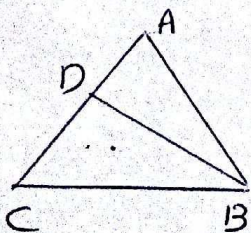
$\hat{A}_1 = \hat{A}_r$	منف
$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$	مم

اثبات: از رأس C خطی موازی نیسان AD چنان رسم می کنیم که امتداد AB را در نقطه E قطع کند، ربه E و مل می کنیم.

$$\begin{aligned} AD \parallel CE, AC \text{ مورب} &\Rightarrow \hat{A}_r = \hat{C}_1 \\ AD \parallel CE, AE \text{ مورب} &\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{E} \end{aligned} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_r, \hat{C}_1 = \hat{E} \Rightarrow \triangle ACE \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow AE = AC$$

$$AD \parallel CE \xRightarrow{\text{تالس}} \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC} \xRightarrow{AE=AC} \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

مثال در مثلث ABC، $AB=7$ ، $AC=4$ و $BC=8$ است. طولهای دو قطعه ای که نیسان زاویه B روی ضلع مقابل ایجاد می کند را بیابید.

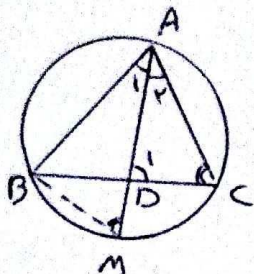


$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{AD+CD}{CD} = \frac{7+8}{8} = \frac{15}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{4}{8} \Rightarrow \frac{4}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow CD = \frac{8}{2} = 4$$

$$AD = AC - CD = 4 - 4 = 0$$

قضیه طول نیساز داخلی
ثابت کنید در هر مثلث، مربع طول هر نیساز داخلی برابر است با حاصل ضرب طول اضلاع آن زاویه منهای حاصل ضرب طول قطعات ایجاد شده توسط نیساز داخلی روی ضلع مقابل.



فرض	AD نیساز داخلی $\hat{A}$
هکم	$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$

اثبات: مطابق شکل ابتدا دایره محیطی مثلث $\triangle ABC$ را رسم می‌کنیم پس نیساز AD را امتداد داده تا دایره محیطی را در M قطع کند.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{C} = \hat{M} = \widehat{AB} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AM} = \frac{DC}{BM}$$

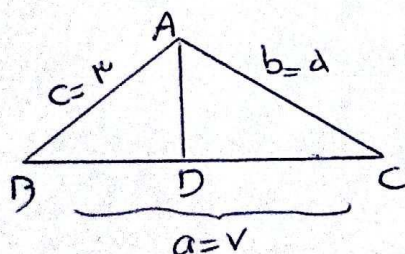
$$\Rightarrow AD \cdot AM = AB \cdot AC \Rightarrow AD(AD + MD) = AB \cdot AC$$

$$\Rightarrow AD^2 + AD \cdot MD = AB \cdot AC \quad (1)$$

طبق روابط طولی در دایره: $AD \cdot MD = BD \cdot DC \quad (2)$

$$(1), (2) \Rightarrow AD^2 + BD \cdot DC = AB \cdot AC \Rightarrow AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

مثال) در مثلثی به اضلاع ۳ و ۴ و ۵ طول نیساز داخلی بزرگترین زاویه را بیابید



$$AD \text{ نیساز} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{BD}{BD+DC} = \frac{3}{3+4}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{5} = \frac{3}{7} \Rightarrow BD = \frac{15}{7} \Rightarrow CD = 5 - \frac{15}{7} = \frac{20}{7}$$

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC = 3 \times 4 - \frac{15}{7} \times \frac{20}{7} = 12 - \frac{300}{49} = \frac{288}{49}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{12}{7}$$